

VICTOR DIAS DA SILVA  
WILTON ARAÚJO DE ALMEIDA

**DESENVOLVIMENTO DE CONTROLADOR PID  
DIGITAL DE NÍVEL COM ARDUINO E SENSOR  
CAPACITIVO**

BACHARELADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DOCTUM – MG

2014

VICTOR DIAS DA SILVA  
WILTON ARAÚJO DE ALMEIDA

**DESENVOLVIMENTO DE CONTROLADOR PID  
DIGITAL DE NÍVEL COM ARDUINO E SENSOR  
CAPACITIVO**

Monografia apresentado à banca examinadora do curso de Engenharia Elétrica do Instituto Doctum de Educação e Tecnologia como requisito parcial de obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica orientado pela professora Natália Alcântara da Silva.

DOCTUM – CARATINGA

2014

VICTOR DIAS DA SILVA  
WILTON ARAÚJO DE ALMEIDA

Monografia submetida à Comissão examinadora designada pelo curso de Graduação em Engenharia Elétrica como requisito para obtenção do grau em Bacharel.

---

EXAMINADOR 1

---

EXAMINADOR 2

---

EXAMINADOR 3

Caratinga,2014

Dedico este trabalho a minha mãe Sueli, a minha avó Marli e a meu pai Gilson pela sincera dedicação e esforço na minha educação ao longo de 24 anos até a presente data da obra, dedico também a todos aqueles que acreditaram que a presente obra seria possível.

(Victor Dias da Silva)

Dedico este trabalho a minha esposa Angélica, por sempre ter me incentivado e apoiado aos meus estudos, à minha filha Manuela que tantas alegrias me deram e me dão fazendo com que as dificuldades e os problemas se tornem menores e aos amigos que realizaram esta caminhada juntamente comigo. (Wilton Araújo de Almeida)

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplo de malha de controle

Figura 1.2 - Exemplo de malha de controle com PID

Figura 1.3 - Sensor capacitivo

Figura 1.4 - Circuito do sensor

Figura 1.5 - Sensor sem filtro

Figura 1.6 - Entrada não filtrada

Figura 1.7 - Entrada filtro 100pF

Figura 1.8 - Sinal entrada filtro 100pF

Figura 1.9 - Entrada completamente filtrada

Figura 1.10 - Exemplo de sinal PWM

Figura 1.11 - Circuito de saída

## LISTA DE FÓRMULAS

Equação 1.1 - PID em função da frequência

Equação 1.2 - PID retroagido

Equação 1.3 - Sistema subamortecido

Equação 1.4 - Sistema Sobreamortecido

Equação 1.5 - Sistema criticamente amortecido

Equação 1.6 - Capacitância

Equação 1.7 - Capacitância total no sensor

Equação 1.8 - Modelo final de capacitância do sensor

Equação 1.9 - Capacitância de filtragem

Equação 2.1 - Sinal discreto no domínio do tempo

Equação 2.2 - Sinal discreto no domínio do tempo a uma entrada

Equação 2.3 - Formula geral da transformada Z

Equação 2.4 - Transformada Z a uma entrada

Equação 2.5 - Fórmula de Euler

Equação 2.6 - S em função de Z pela fórmula de Euler

Equação 2.7 - Método de diferença para trás

Equação 2.8 - S em função de Z pelo método de diferença para trás

Equação 2.9 - Nível de quantização

Equação 2.10 - Precisão conversor A/D

Equação 2.11 - Precisão conversor D/A

Equação 2.13 - PID no domínio do tempo

Equação 2.14 - PID no domínio do tempo em função de  $T_i$  e  $T_d$

Equação 2.15 - Ganho integral

Equação 2.16 - Ganho derivativo

Equação 2.17 - PID discreto

Equação 2.18 - Derivada do erro

Equação 3.1 - Função de transferência de sistema de primeira ordem

Equação 3.2 - Frequência exponencial

Equação 3.3 - Ganho em função da frequência exponencial

Equação 3.4 - Função de transferência obtida

Equação 3.5 - Função de transferência em tensão

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1.1 - Sistema oscilatório

Gráfico 1.2 - Sistema subamortecido

Gráfico 1.3 - Lugar das raízes do sistema subamortecido

Gráfico 1.4 - Sistema Sobreamortecido

Gráfico 1.5 - Lugar das raízes do sistema Sobreamortecido

Gráfico 1.6 - Sistema criticamente amortecido

Gráfico 1.7 - Lugar das raízes do sistema criticamente amortecido

Gráfico 1.8 - Lugar das raízes do sistema oscilatório

Gráfico 1.9 - Saída do PID  $K_p=5$ ,  $K_i=100$  e  $K_d=10$

Gráfico 1.10 - Saída do PID  $K_p=0,01$ ,  $K_i=100$  e  $K_d=10$

Gráfico 2.1 - (a) Entrada (b) Entrada no amostrador (C) Entrada no segurador

Gráfico 2.2 - Teste 1

Gráfico 2.3 - Teste 2

Gráfico 3.1 - Resposta natural do sistema

Gráfico 3.2 - Resposta natural no Matlab

Gráfico 3.3 - Resposta sintonizada no Matlab

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 2.1 - Sinais amostrados



## RESUMO

O presente trabalho visa implementar um controle PID digital em um arduino onde a injeção de água em um tanque é regulada por este. O controle no entanto será do tipo regulador onde o controle visa manter um determinado parâmetro (no caso o nível de água) da forma mais estável possível mediante um distúrbio causado pelo abrir e fechar de uma válvula. Uma vez causado o distúrbio o controle manterá a posição do nível de forma que este oscile a menor posição possível. Além disto a medição do nível ocorrerá pelo uso de um sensor capacitivo. Por ser de baixo custo o projeto também visa disseminar o controle PID favorecendo futuros trabalhos práticos com uma planta didática acessível.

**Palavras-chave:** Teoria do controle, controlador PID, sinais e sistemas.

## **ABSTRACT**

This paper aims at implementing a digital PID control in an Arduino where the injection of water in a tank is regulated by this. The control however is where the regulator type control aims to maintain a certain parameter (if the water level) in the most stable form by a disorder caused by the opening and closing of a valve. Since the disturbance caused control to maintain the level position so that it oscillates the lowest possible position. Besides the measurement of the level occurs by the use of a capacitive sensor. Because of its low cost, the project also aims to disseminate the PID control favoring future with a practical didactic plan works affordable.

**Keywords:** Control theory, PID controller, signals and systems.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	2
<b>1 - ENTRADA E SAÍDA</b> .....	6
1.1 - O controlador.....	6
1.2 –Entrada.....	14
1.3 –Saída.....	22
<b>2 - MODELAGEM DE SISTEMAS DISCRETOS DE CONTROLE DE PROCESSOS</b> .....	24
2.1 - Sistemas de controle discretos.....	24
2.2 - A transformada Z.....	25
2.3 - Aproximação digital de controladores analógicos.....	28
2.4 - Resolução mínima para conversor A/D e D/A.....	30
2.5 - O controlador PID em sistemas digitais.....	33
<b>3 -O PROJETO DO CONTROLE</b> .....	37
3.1 - Obtenção experimental da função de transferência.....	37
3.2 - Extraindo a função do gráfico.....	39
3.3 –Conclusão.....	41
3.4 - Proposta de trabalhos.....	42
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	43

## INTRODUÇÃO

O ser humano desde tempos imemoriais na face da Terra busca infinitos meios para compensar sua fragilidade física diante da natureza, incansavelmente buscando meios para dominá-la em seu proveito, para isto, mesmo sem garras nem presas desenvolvemos uma habilidade única para criar ferramentas com diversas finalidades para nosso proveito. É desta necessidade de sobrevivência que criamos a tecnologia, da qual emana a teoria do controle.

Em diversas civilizações a necessidade do controle de algum fenômeno já foi necessária, e coincidentemente o controle do nível de um fluido é um dos problemas mais antigos desta ciência que remonta séculos atrás na Grécia antiga, como cita Dorff e Bishop:

As primeiras aplicações do controle com retroação apareceram no desenvolvimento do mecanismo regulador de boia na Grécia no período entre 300 a 1 a.C. Um lampião de óleo inventado por Philon aproximadamente em 250 a.C. usava um regulador de boia para manter constante o nível do óleo combustível. Heron de Alexandria, que viveu no primeiro século d.C., publicou um livro intitulado *Pneumática*, que ressaltava algumas formas de mecanismos de nível de água usando reguladores de boia. [1]

A partir daí, séculos se passaram até que a teoria do controle se tornasse uma ciência baseada em cálculo e não em intuição, o primeiro sistema de controle modelado com a metodologia de cálculo que mais se aproxima da atual, foi feita por James Watt que criou o primeiro sistema de controle automático com retroação para uso de sistemas industriais, que foi o *regulador de esferas* como afirma Dorff e Bishop: “O primeiro controlador automático com retroação usado em um processo industrial é geralmente aceito como sendo o regulador de esferas de James Watt, desenvolvido em 1769 para controlar a velocidade de uma máquina a vapor”[2].

---

<sup>1</sup>DORFF, Richard C., BISHOP, Robert H. **Sistemas de controle moderno**. 8.ed., Rio de Janeiro: LTC, 2001. P.3.

<sup>2</sup>DORFF, Richard C., BISHOP. **Opus cit.** P.3.

Hoje, diante da insaciável demanda por produtos, a automação dos processos industriais não é só mais um capricho, porém, uma tendência irreversível como assinala Dorff e Bishop:

Em 1925, cerca de 588.000 pessoas- aproximadamente 1,3% da mão-de-obra da nação- eram necessárias para a extração de 520 milhões de toneladas de carvão betuminoso e linhita, predominantemente em minas no subsolo. Por volta de 1980, a produção foi superior a 774 milhões de toneladas, mas a força do trabalho foi reduzida para 208.000 pessoas. Além disso, desse número, somente 136.000 pessoas foram empregadas nas operações subterrâneas de mineração. As minas de superfície altamente mecanizadas e altamente produtivas, com apenas 72.000 operários, produziram 482 milhões de toneladas, ou 62% do total. [3]

Pode-se observar desta comparação, que em 1925, cerca de oito vezes mais trabalhadores eram necessários para se extrair quase a mesma quantidade de carvão que se extrai hoje com um contingente de trabalhadores muito menor. Isto é óbvio, não se deve à mágica, porém à automação crescente das máquinas. Daí pode-se tirar como benefício da automação de um processo, a redução de custos para o beneficiamento ou produção de um produto, se comparada à redução de mão de obra exigida para fazer a mesma tarefa antes, além de ser possível obter mais precisão e melhora da qualidade.

Visando esta tendência o presente trabalho propõe um experimento onde se pode observar na prática todo o fazer científico da automação de um processo tendo como exemplo a automação do nível de um tanque. A escolha deste tipo de automação foi tomada com base que o controle de nível é quase universal na maioria dos processos industriais sendo de fácil observação como assinala Ramos e Wense: “Sistemas de nível de líquido têm destaque em diversos ramos da atividade industrial, dentre eles o da petroquímica, nuclear e de celulose. Neste contexto, um dos controles com maior importância nas unidades industriais é o dos níveis”[4].

Em relação ao controlador será utilizado um arduino UNO revisão 2, este controlador será utilizado tendo em vista sua facilidade de obtenção e além de ser

---

<sup>3</sup> DORFF, Richard C., BISHOP. **Opus cit.** P.6.

<sup>4</sup> RAMOS, Adriano Peixoto, WENSE, Gabriel Lula Barros. **Sistema didático de nível de líquido**. Trabalho de conclusão de curso (Bacharel em engenharia do controle e automação). Brasília: UNB,2008. Disponível em: <<http://lara.unb.br/~bauchspiess/tg/TG08%20Adriano%20P.%20Ramos%20e%20Gabriel%20L.B.%20Wense.pdf>>. Acessado em: 8 ago 2014. P.7.

grande sua biblioteca principalmente para o controle PID que será implementado. O fato de se criar um PID (controlador proporcional, integral, derivativo) apenas fornecendo o ganho proporcional, integral e derivativo como parâmetro para o arduino reduz o trabalho de se criar um circuito com amplificadores operacionais direcionando todo nosso esforço ao cálculo e nos dando a possibilidade de caso haja algum problema, remodelar o sistema, sendo menos arriscado perder o trabalho todo durante o processo, desta forma o único circuito que demandará nossa atenção será o de acionamento da bomba.

A importância do controlador PID é atestada por Ogata citação com a qual o presente trabalho toma como marco teórico:

A utilidade dos controles PID está na sua aplicabilidade geral à maioria dos sistemas de controle. Em particular, quando o modelo matemático da planta não é conhecido e, portanto, métodos de projeto analítico não podem ser utilizados, controles PID se mostram os mais úteis<sup>[5]</sup>.

Tal citação também é atestada por Dorff e Bishop:

Muitos processos industriais são controlados usando controladores do tipo proporcional integral derivativo (PID). A popularidade de controladores PID pode ser atribuída parcialmente ao seu bom desempenho em uma ampla faixa de condições de operação e parcialmente à sua simplicidade funcional que permite aos engenheiros operá-los de um modo simples e direto. Para implementar um tal controlador, há necessidade de serem determinados, para um dado processo: o ganho proporcional, o ganho integral e o ganho derivativo.<sup>[6]</sup>

Faccin também afirma:

O controlador PID é o algoritmo de controle mais difundido nas unidades industriais em todo o mundo. Além de estar disponível em praticamente todas as plataformas de controle comerciais, ele é um algoritmo robusto, de fácil entendimento, e capaz de prover performance satisfatória para uma grande variedade de processos industriais.<sup>[7]</sup>

---

<sup>5</sup> OGATA, katsushiko. **Opus cit.** P.557.

<sup>6</sup> DORFF, Richard C., BISHOP. **Opus cit.** P.289.

<sup>7</sup> FACCIN, Flávio. **Abordagem inovadora no projeto de controladores PID.** Dissertação de mestrado (Mestrado em engenharia elétrica). UFRGS, 2004. Disponível em: <[http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/12544/000626885.pdf?sequence=1&locale=pt\\_BR](http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/12544/000626885.pdf?sequence=1&locale=pt_BR)> Acessado em: 8 ago 2014. P.10.

Por fim Mesquita et.al. também confirmam: “A capacidade que os controladores proporcional-integral-derivativo (PID) têm para compensar os mais diversos processos práticos, fez com que este tipo de controlador tornasse o mais aplicado no setor industrial, por apresentar sua estrutura simples e desempenho robusto”<sup>[8]</sup>.

Desta forma, tendo como base a precisão de um sensor capacitivo e a versatilidade e robustez de um controlador PID o presente trabalho propõe um experimento de controle de nível onde a injeção de água a um determinado nível em um tanque é regulada por um controlador PID digital implementado em arduino e tendo como sensor um capacitor imerso e como atuador uma bomba DC.

---

<sup>8</sup> MESQUITA, Brehme D. R. de, SILVA, Jefferson A. L. e, FERREIRA, André M. D. **Comparação entre controladores PID clássico e PID fuzzy com ganho programado no sistema de azimute.** IFPA, 2012. Disponível em: <[http://www.academia.edu/3854982/Comparacao\\_entre\\_controladores\\_PID\\_classico\\_e\\_PID\\_fuzzy\\_com\\_ganho\\_programado\\_no\\_sistema\\_de\\_azimute](http://www.academia.edu/3854982/Comparacao_entre_controladores_PID_classico_e_PID_fuzzy_com_ganho_programado_no_sistema_de_azimute)> Acessado em: 8 ago 2014. P.2.

## 1 - ENTRADA E SAÍDA

### 1.1 - O CONTROLADOR PID

Na grande maioria dos controles industriais o controlador PID é sem dúvida o mais empregado, neste tipo de controle a malha é controlada em função de três termos ou ganhos cada um tendo um efeito na malha de controle. Segundo Bezerra: “o controlador oferece um termo proporcional que reduz o tempo de acomodação, o termo de integração elimina o erro de regime e o termo derivativo aumenta a estabilidade do sistema.”<sup>[9]</sup>. Saber combinar estes três ganhos de modo a gerar uma resposta satisfatória tanto transitória quanto em regime permanente é o cerne da teoria do controle.

O controlador PID tem grande aplicação na indústria como atesta Ogata: “mais da metade dos controladores industriais em uso nos dias atuais utiliza estratégias de controle PID ou PID modificadas. <sup>[10]</sup>” A mesma afirmação é atestada por Yamamoto e Azevedo: “É estimado que mais de 95% dos controles industriais são baseados em algoritmos PID (proporcional integral derivativo).<sup>[11]</sup>”

Para melhor visualizar o funcionamento de controle PID na resposta de uma malha de controle podemos tomar como exemplo a seguinte função de transferência obtida por Nise <sup>[12]</sup> (para ficar claro esta função só será usada para uma explanação conceitual, a extração da função de transferência real do sistema e sua sintonia está no capítulo três da obra):

---

<sup>9</sup> BEZERRA, Matheus Sales. **Projeto, implementação e ensaios de um controlador PID utilizando FPGA**. Trabalho de conclusão de curso (Bacharel em engenharia elétrica). Fortaleza: Universidade federal do ceará. Disponível em:<<http://www.dee.ufc.br/anexos/TCCs/2010.1/MATHEUS%20SALES%20BEZERRA.pdf>> Acessado em:17/10/2014. P.3.

<sup>10</sup> OGATA, katsushiko. **Engenharia de controle moderno**.4. Ed., Rio de janeiro: Pretince Hall, 2003.P. 557.

<sup>11</sup>YAMAMOTO, Guilherme kenji, AZEVEDO, Renan Airosa de. **Aplicações da industria que utilizam controle PID**. Saber eletrônica. São Paulo, ano 50, n.475, jan-fev 2014.p.44.

<sup>12</sup> NISE, Norman S.**Engenharia de sistemas de controle**. 3.ed, Porto Alegre: LTC,2002. P.130.



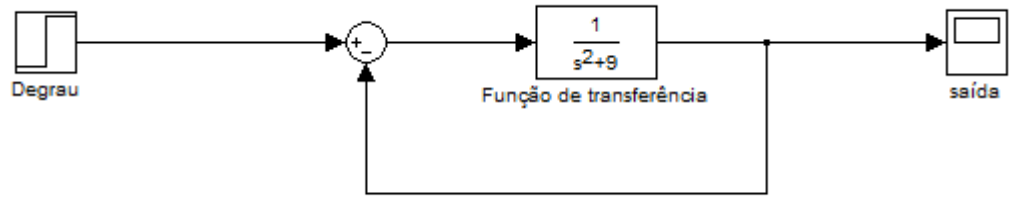


Figura 1.1 - Exemplo de malha de controle

Plotando esta função no Matlab obtemos a saída:

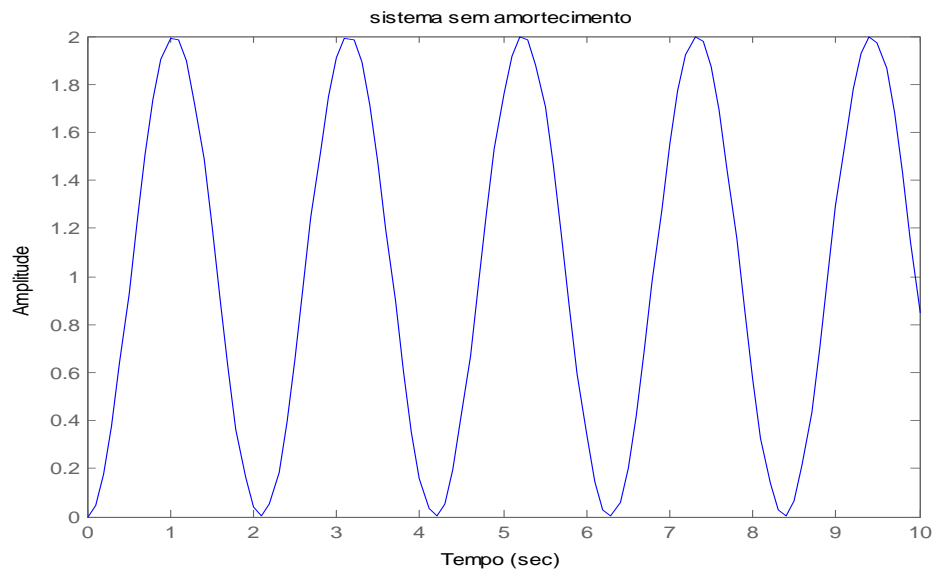


Gráfico 1.1 - Sistema oscilatório

Observe que o sistema é completamente oscilatório e, portanto instável, adicionando um controlador PID em série com a função de transferência obtemos:

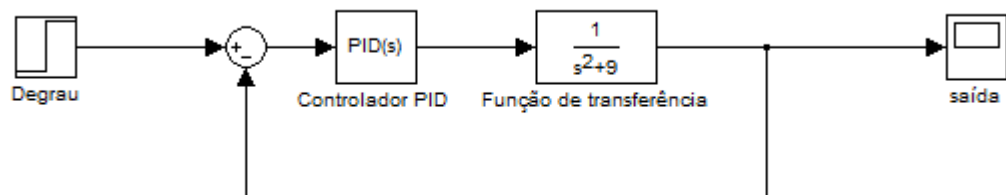


Figura 1.2 - Exemplo de malha de controle com PID

A função de transferência do PID é dada por:

$$PID(s) = \frac{kds^2 + kps + ki}{s} \quad (\text{Equação 1.1})$$

Onde:

- Kp é o ganho proporcional;
- Ki é o ganho integral;
- Kd é o ganho derivativo.

Retroagindo a função obtemos:

$$T(s) = \frac{kds^2 + kps + ki}{s^3 + kds^2 + (kp + 9)s + ki} \quad (\text{Equação 1.2})$$

Pode-se observar que uma vez retroagido o sistema os valores de Kp, Ki e Kd se encontram também no denominador da equação, isto é muito importante, pois o denominador de uma função de transferência dita o comportamento do sistema inteiro, por conta disto o polinômio no denominador da função de transferência é chamado de equação característica, as raízes desta equação são chamadas de pólos e são representadas graficamente em um par ordenado em um plano de coordenadas imaginárias. A partir da raiz obtida e sua localização no plano imaginário diferentes respostas podem ser obtidas como cita Ogata:

A estabilidade de um sistema linear a malha fechada pode ser determinada pela localização dos pólos de malha fechada no plano S. Se qualquer destes pólos está no semiplano direito do plano S, então para tempos crescentes eles vão resultar no modo dominante, e a resposta transitória aumenta monotonicamente ou oscila com amplitude crescente. Isto representa um sistema instável. [<sup>13</sup>]

Ogata complementa:

---

<sup>13</sup>OGATA, katsushiko. **Opus cit.** P.284.

Portanto, pólos de malha-fechada no semiplano direito não são permissíveis no sistema de controle linear usual. Se todos os pólos de malha fechada estão no semi-plano esquerdo do plano S, qualquer resposta transitória alcança um equilíbrio. Isto representa um sistema estável. [14]

Nise [15] enumera três tipos de respostas de um sistema de segunda ordem com uma entrada ao degrau e as respectivas influências de seus pólos em suas respostas que são, a saber: O sistema subamortecido, sobreamortecido e criticamente amortecido. O sistema subamortecido possui dois pólos (raízes da equação característica) complexos e conjugados, o sobreamortecido possui dois pólos reais e distintos e o criticamente amortecido possui dois pólos reais iguais, analisando graficamente obtemos:

- Sistema subamortecido:

$$T(s) = \frac{9}{s^2 + 2s + 9} \quad (\text{Equação 1.3})$$

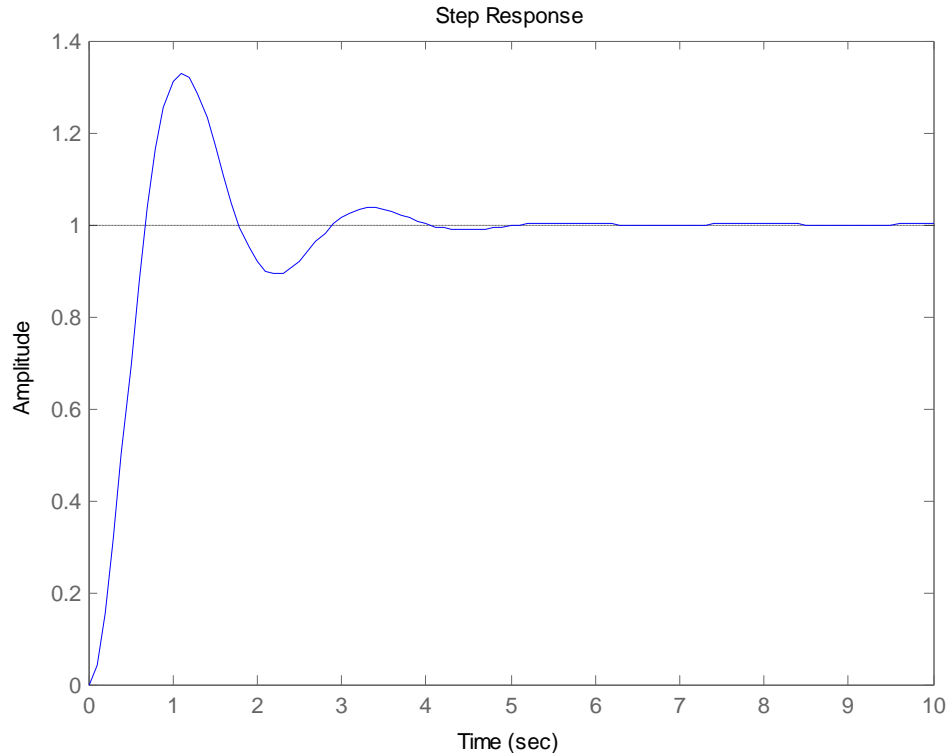


Gráfico 1.2 - Sistema subamortecido

<sup>14</sup>OGATA, katsushiko. **Opus cit.** P.285.

<sup>15</sup>NISE, Norman S. **Opus cit.** P.130.

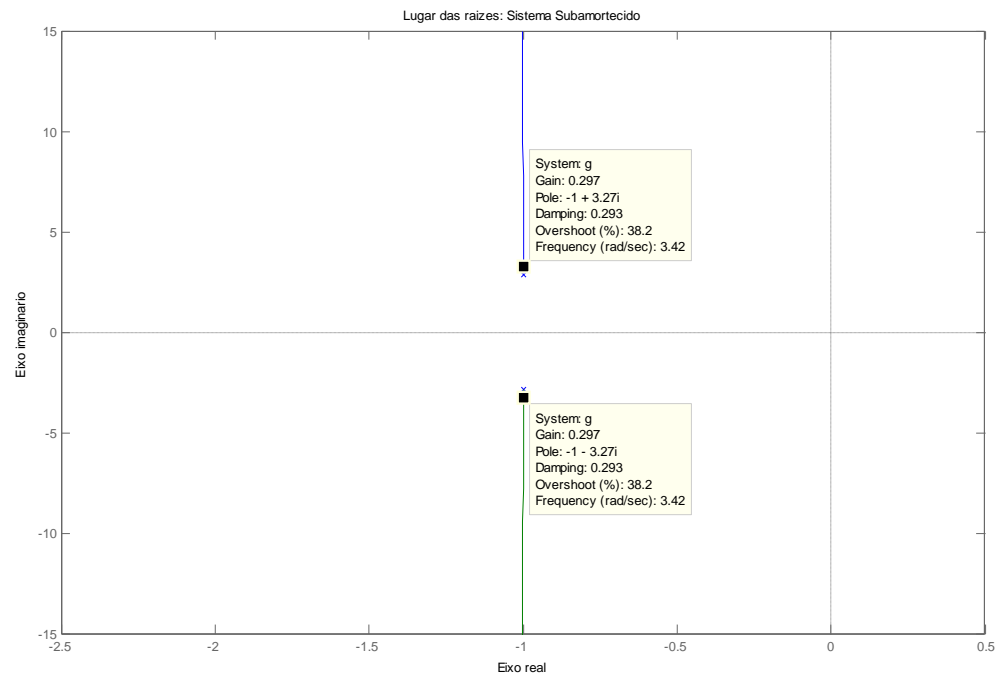


Gráfico 1.3 - Lugar das raízes do sistema subamortecido

- Sobreamortecido:

$$T(s) = \frac{9}{s^2 + 9s + 9}$$

(Equação 1.4)

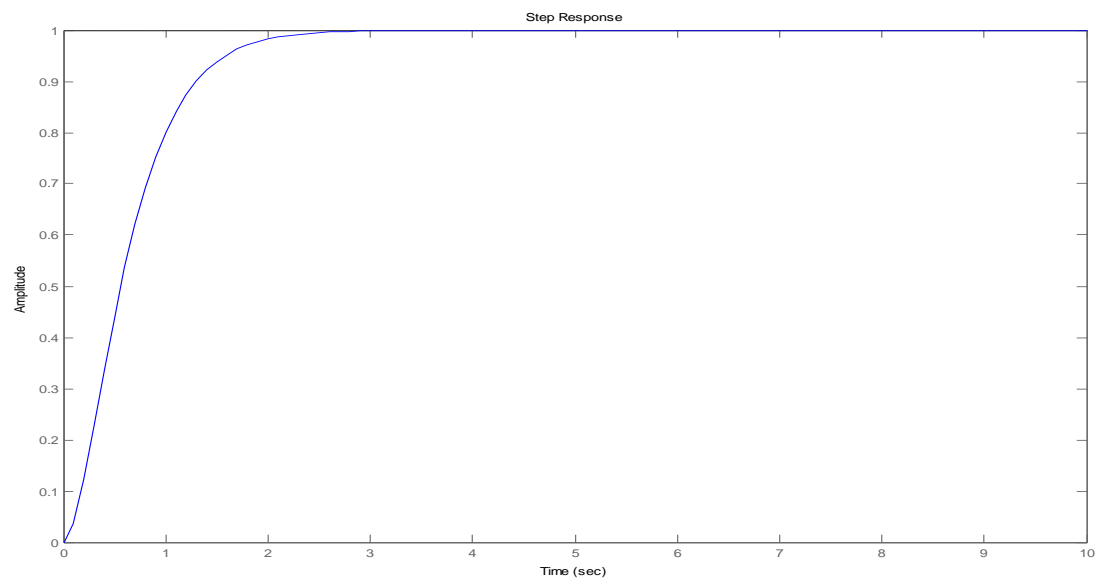


Gráfico 1.4 - Sistema Sobreamortecido

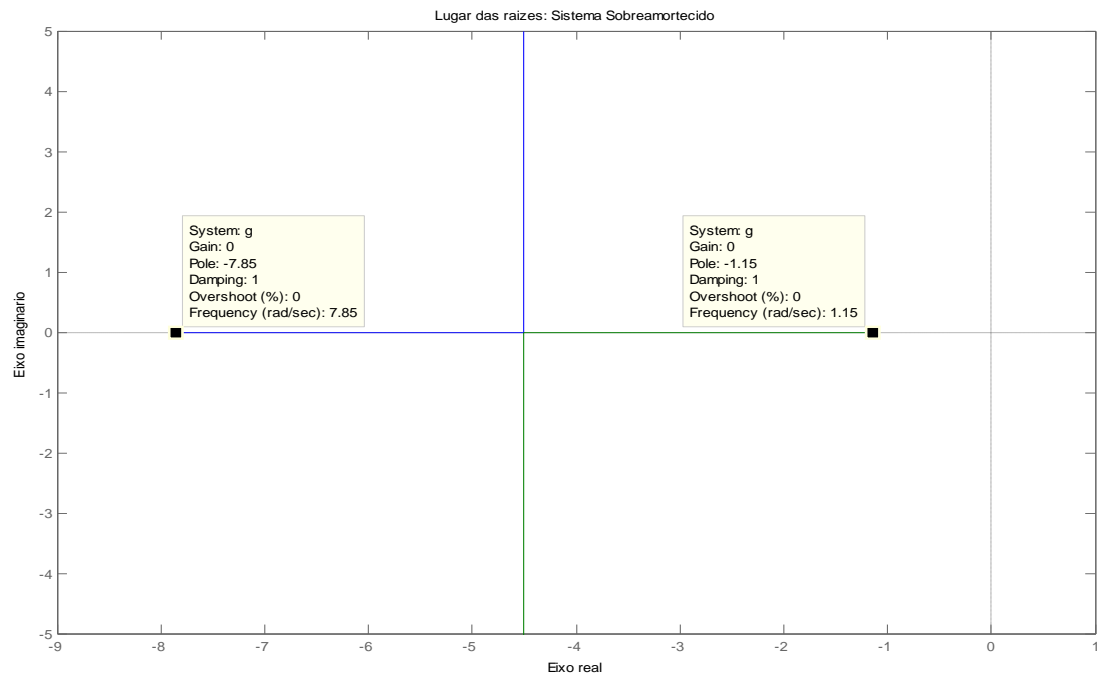


Gráfico 1.5 - Lugar das raízes do sistema sobreamortecido

- Criticamente amortecido:

$$T(s) = \frac{9}{s^2 + 6s + 9} \quad (\text{Eq 1.5})$$

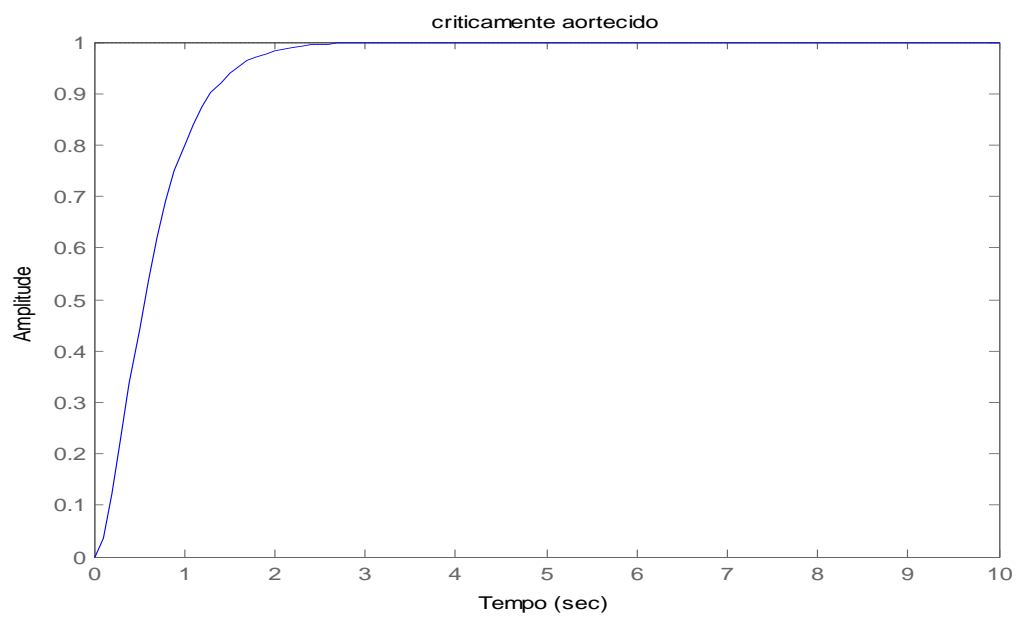


Gráfico 1.6 - Sistema criticamente amortecido

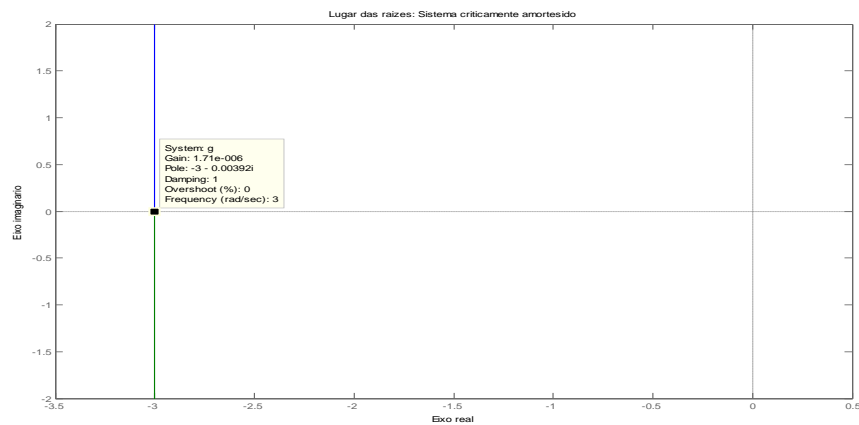


Gráfico 1.7 - Lugar das raízes do sistema criticamente amortecido

Dos gráficos plotados algo que se deve levar em conta é o quão fiéis ou não eles foram ao sinal de controle, ou seja ao degrau unitário, em tese todos eles deveriam atingir 1 como valor final de resposta, é meta do projetista de controle estabelecer parâmetros que ajuste a resposta natural do sistema a valores exigidos, além disto devemos observar que cada um a das funções possui um padrão de pontos onde suas raízes se situam no plano complexo que também determina seu padrão de resposta, quão mais à esquerda no eixo real se situarem os pólos de um sistema mais estável ele é, se compararmos à função de transferência da figura 1.1 seus pólos se situam na origem do eixo real, isto é algo a ser relevado pelo projetista como podemos observar:

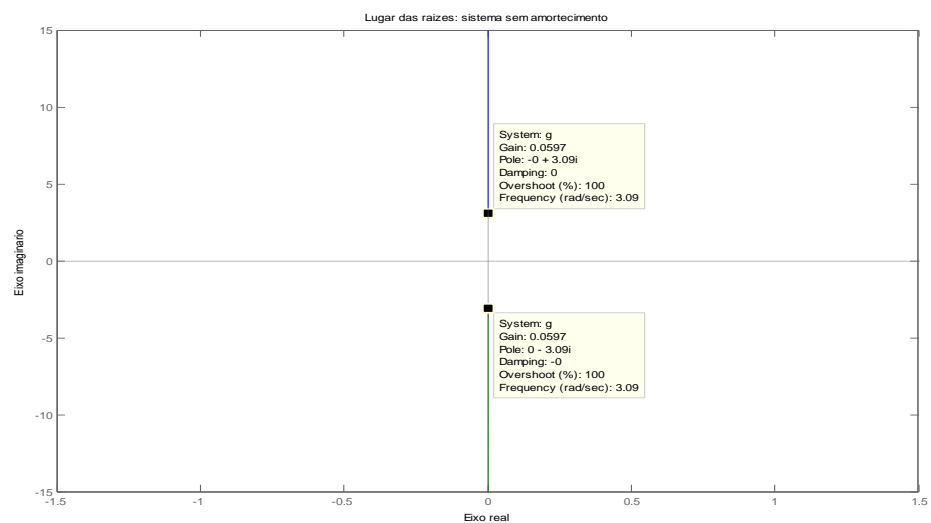


Gráfico 1.8 - Lugar das raízes do sistema oscilatório

Tomando como referência a função de transferência da figura 1.1 e a equação 1.2 pode-se determinar valores para  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  tal que o sistema inicialmente sem controle tenha uma resposta de saída sobreamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida, ou que atenda valores de sobresinal, tempo acomodação e tempo de subida que por ventura sejam exigidos, como exemplo podemos determinar valores de  $K_p=100$ ,  $K_i=200$  e  $K_d=150$  e obter:

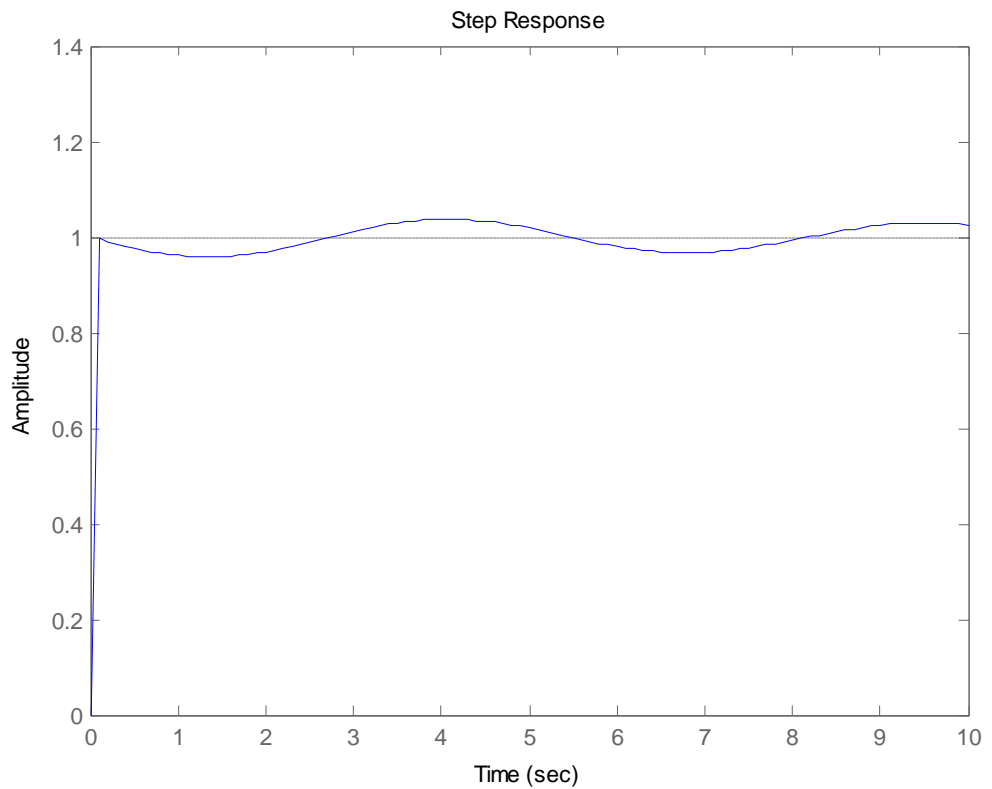


Gráfico1.9 - Saída do PID: $K_p=100$ ,  $K_i=200$  e  $K_d=150$

Note que o sistema apesar de ser rápido ele é permanentemente oscilatório, estabelecendo  $K_p=250$ , e mantendo os outros valores obtemos:

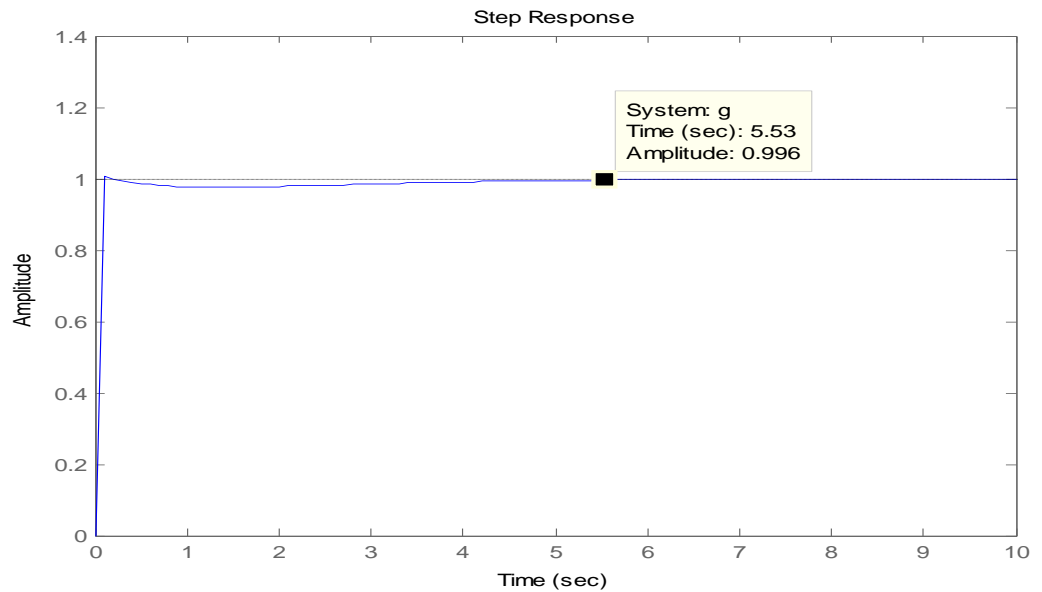


Gráfico 1.10 - Saída do PID:  $K_p=250$ ,  $K_i=200$  e  $K_d=150$

Observe agora como a alteração no valor de  $K_p$  mudou significativamente a resposta aproximando a saída quase a um degrau perfeito, é obvio que a grande maioria dos sistemas de controle não exigem (ou não suportam) uma resposta tão rápida porém ela deve ser o mais fiel possível ao degrau proveniente do setpoint.

Desta forma pode-se concluir que o controle PID dá domínio ao projetista para deslocar os pólos de uma malha de controle conforme for exigido mesmo para um sistema completamente oscilatório, pois como a própria fórmula 1.2 sugere, o PID nos dá poder para alterar como bem quiser a equação característica da função de transferência que modela o sistema a ser controlado.

## 1.2 - ENTRADA

Para o desenvolvimento de um controle três elementos são necessários: o sensor, o controlador e o atuador. O sensor obviamente é responsável por observar o fenômeno, o controlador elabora uma resposta de saída a partir da entrada e da referência, que no caso deste trabalho refere-se ao PID e o atuador age diretamente



no fenômeno a ser controlado. Em relação aos sensores eles podem ser de dois tipos como explica Melo e Bernardes:

Basicamente, o monitoramento do nível pode ser efetuado de duas formas distintas: diretamente (onde o medidor observa a camada superior do fluido em questão) ou indiretamente (através do conhecimento de outra grandeza que possibilite uma relação entre seu valor e o nível do reservatório). Bóias, por exemplo, são sensores de nível do tipo direto. Sensores de pressão podem ser considerados como medidores indiretos de nível<sup>[16]</sup>.

É mais conveniente em se tratando de controle, utilizar sensores de medição indireta uma vez que estes permitem que um controlador seja utilizado para elaborar sua saída em função dos sinais elétricos produzidos pelo sensor. Em relação à medição de nível vários sensores podem ser usados, como o de ultra-som que mede o nível baseado na reflexão do som até um objeto ou corpo que atenua seu sinal. O sensor de pressão mede o nível usando um sistema de nível de fluidos onde um tubo é imerso no líquido e o nível é medido tendo como base a pressão barométrica no tubo. Ambos os sensores são de difícil obtenção sendo escassos trabalhos que sirvam de modelo, o que justifica o não emprego destes no nosso trabalho. Por outro lado um sensor amplamente utilizado em indústrias e de fácil construção são os capacitivos, eles baseiam sua medição à medida que a coluna de líquido sobe e varia seu dielétrico, as vantagens do uso do sensor capacitivo são atestadas por Araujo: “Como o capacitor é maior do que o tanque é possível medir o nível de água em toda sua extensão, e como a turbulência ocorre apenas na lâmina de água, a variação na capacitância do sensor é mínima, tornando a medição muito precisa. [17]”

Diante disto o sensor de nível capacitivo mostra-se o mais viável para o projeto, uma vez que ele assegura precisão e é facilmente realizável.

<sup>16</sup> MELO, Gustavo Amaral Ferreira de, BERNARDES, Mariana Costa. **Instrumentação e controle de uma maquete de nível de líquido com quatro tanques interligados**. Trabalho de conclusão de curso (bacharelado em engenharia mecatrônica). Brasília: UNB, 2006. Disponível em: <<http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB8QFjAA&url=http%3A%2F%2Flara.unb.br%2F~gaborges%2Farquivos%2Fpf.mariana.bernardes.gustavo.melo.2005.2.pdf&ei=ueMAVKW2FLHnsASxjYLICw&usg=AFQjCNG6hQcWui4uo9nHpsOUT7XBdwmBSQ&bvm=bv.74115972,d.cWc>> Acessado em: 8 ago 2014. P.8

<sup>17</sup> ARAUJO, André Luiz. **Desenvolvimento de sensor de nível capacitivo para controle de processos através do CLP micrologix 1500**. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em engenharia elétrica). Vitória: UFES, 2007. Disponível em: <[http://www2.ele.ufes.br/~projgrad/documentos/PG2007\\_1/andreluizaraujo.pdf](http://www2.ele.ufes.br/~projgrad/documentos/PG2007_1/andreluizaraujo.pdf)> Acessado em: 8 ago 2014. P.12.

Construtivamente ele consiste em duas placas de fenolite postas em paralelo uma à outra como pode ser observado na figura a seguir:



Figura 1.3: Sensor capacitivo

Sua medição em relação ao nível é indireta, pois o capacitor funciona como uma reatância capacitiva variável. Uma vez que a capacitância aumenta, à medida que o nível de água sobe e o sensor é energizado por uma corrente alternada, conseqüentemente há uma queda de tensão entre seus terminais é por uma correlação entre a queda de tensão no capacitor que é medido o nível. Isto pode ser melhor compreendido analisando a equação:

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{d} \quad (\text{Equação 1.6})$$

Onde C é a capacitância (F),  $\epsilon_0$  é a permissividade eletrostática do vácuo ( $8,84 \times 10^{-12}$ ),  $\epsilon_r$  é a permissividade eletrostática da água (que segundo Araujo<sup>[18]</sup> é igual a 80), S é a área das placas (20cmX5cm) e d é a distância entre elas (1,2cm).

Uma vez dentro do tanque parte do capacitor fica imersa e parte fica exposta ao ar, esta diferença entre a permissividade do ar e da água em regiões distintas do capacitor faz com que o sensor se comporte como uma associação paralela entre

<sup>18</sup> ARAUJO, André Luiz. **Opus cit.** P.14.

dois capacitores, onde as capacitâncias podem ser somadas algebricamente como cita Araújo:

A variação no dielétrico causa uma variação na capacitância do capacitor formado pelas placas paralelas. Um dos dielétricos é o ar atmosférico e o outro é o fluido existente dentro do tanque. À medida que o nível do fluido aumenta no tanque a quantidade de ar diminui, causando assim uma variação no dielétrico do capacitor [...] Temos então uma associação em paralelo de dois capacitores: um onde o dielétrico é o ar, e outro onde o dielétrico é a água. [<sup>19</sup>]

Desta forma, temos então a seguinte equação:

$$C_T = C_{H_2O} + C_{ar} \quad (\text{Equação 1.7})$$

$$C_T = \frac{8,84 \times 10^{-12} \times 80 \times H_{H_2O} \times 0,05}{0,012} + \frac{8,84 \times 10^{-12} \times H_{ar} \times 0,05}{0,012}$$

Como:

$$H_{ar} + H_{H_2O} = 0,2$$

Portanto:

$$H_{ar} = 0,2 - H_{H_2O}$$

Substituindo:

$$C_T = \frac{8,84 \times 10^{-12} \times 80 \times H_{H_2O} \times 0,05}{0,012} + \frac{8,84 \times 10^{-12} \times (0,2 - H_{H_2O}) \times 0,05}{0,012}$$

$$\begin{aligned} C_T &= 2,9467 \times 10^{-9} \times H_{H_2O} + 7,3667 \times 10^{-11} - 3,6833 \times 10^{-10} \times H_{H_2O} \\ C_T &= 2,57837 \times 10^{-9} \times H_{H_2O} + 7,3667 \times 10^{-11} \end{aligned} \quad (\text{Equação 1.8})$$

Como pode ser constatado, a equação 1.8 modela a capacitância em função da altura do nível de água, portanto quanto maior a altura da coluna maior a capacitância, que implica numa menor reatância e conseqüentemente a queda de

<sup>19</sup> ARAUJO, André Luiz. **Opus cit.** P.13.

tensão será menor, com isto, pode-se concluir que há uma relação inversamente proporcional entre a altura de água e a tensão medida.

Uma vez modelado o sensor, um circuito para elaborar sua medida para o arduino pôde ser implementado, sendo este baseado no trabalho desenvolvido por Araujo<sup>[20]</sup> e pode ser visto no esquemático a seguir:

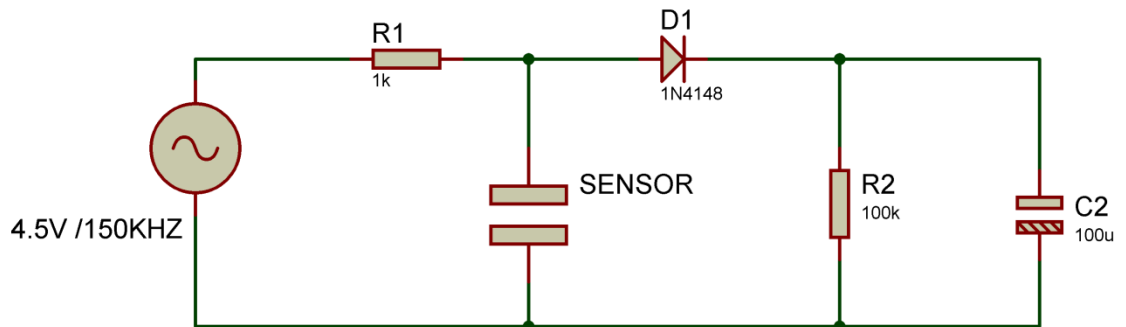


Figura 1.4 - Circuito do sensor

Neste circuito o sinal alternado de tensão sobre o sensor é retificado pelo diodo que por sua vez é filtrado pelo capacitor C2 em paralelo com o resistor R2 para extinguir o ripple do sinal retificado fornecendo uma corrente contínua para ser lida pelo arduino.

Apesar do arduino UNO possuir seis entradas analógicas estas não suportam o semiciclo negativo do sinal alternado tendo que ser retificadas, o que é feito pelo diodo, o diodo tem a propriedade de conduzir apenas o semiciclo positivo da onda desde que este esteja diretamente polarizado com a fonte, porém, apesar de contínuo, o sinal ainda alterna valores de 0 a 4,5V (tensão com a qual foi ajustada como padrão no nosso projeto). Afim de tornar o sinal o mais contínuo possível foi posto um capacitor de filtragem que dispara nos instantes que não há condução do diodo fazendo com que a onda se aproxime de um sinal contínuo. Isto pode ser melhor visualizado simulando o circuito no software PROTEUS:

<sup>20</sup> ARAUJO, André Luiz. **Opus cit.** P.16.

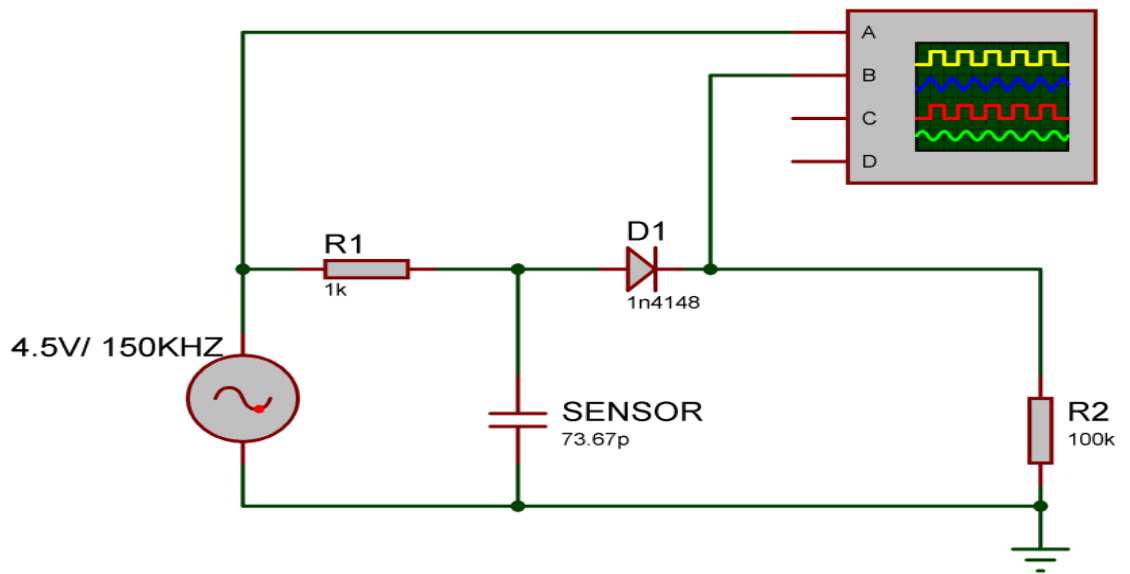


Figura 1.5 - Sensor sem filtro

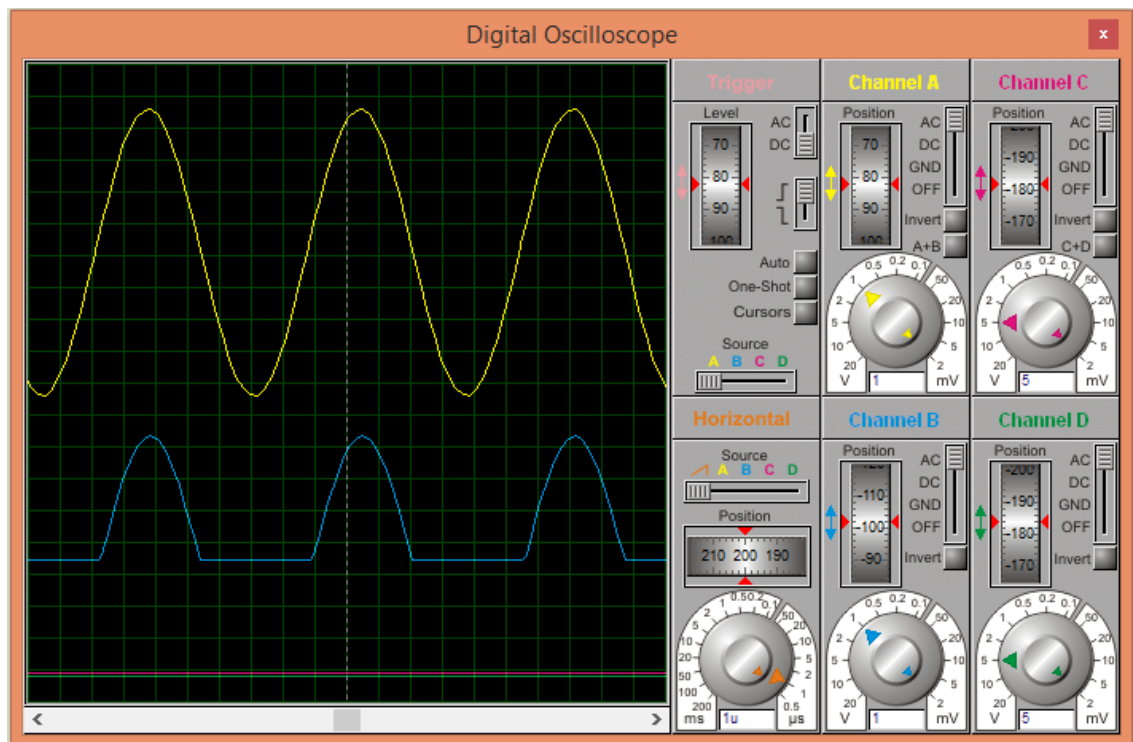


Figura 1.6- Entrada não filtrada

Observe que para a simulação do circuito sem o capacitor C2 de filtragem o sinal de saída do diodo corresponde apenas ao semiciclo positivo do sinal de entrada. Estipulando uma capacitância de filtragem de 100pF temos:

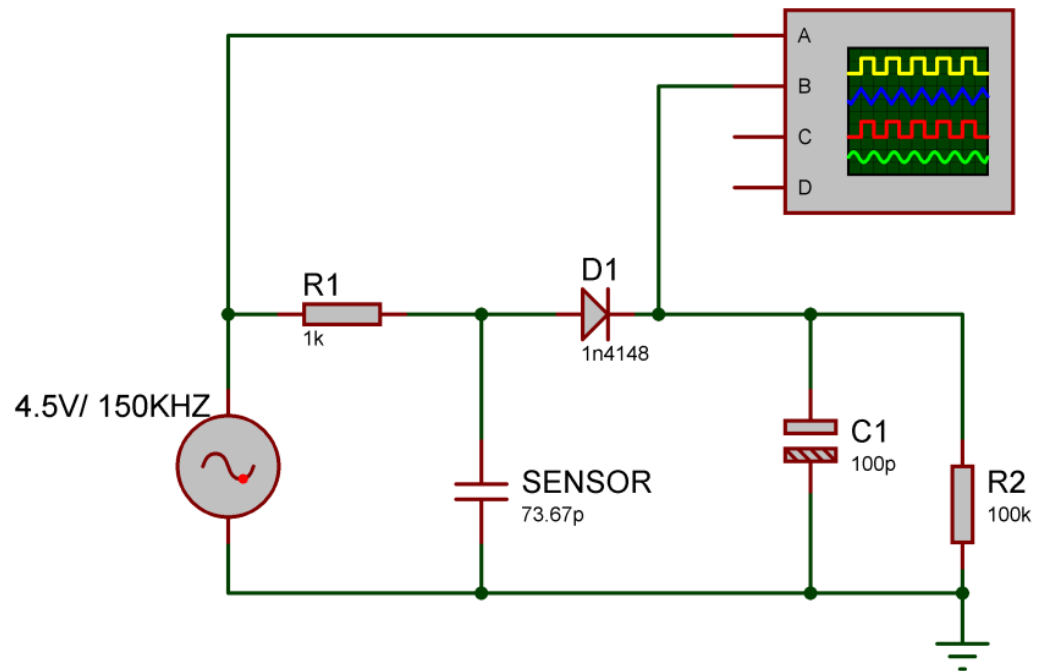


Figura 1.7 - Entrada filtro 100pF

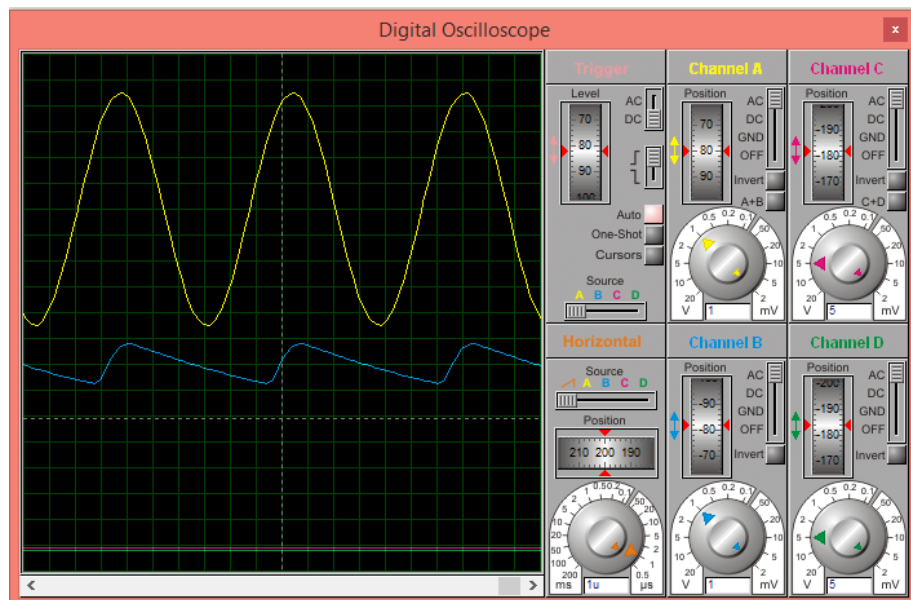


Figura 1.8 - Sinal entrada filtro 100pF

Note agora que o sinal de saída tendeu a uma onda serrilhada, observe também a linha pontilhada abaixo do sinal que representa o zero, ou seja, a origem da magnitude da onda, esta diferença entre a tensão mais alta e a mais baixa no

declive da onda é chamado de ripple, segundo Sedra e Smith [21] podemos modelar um capacitor de filtragem que forneça o menor ripple possível por:

$$C = \frac{V_P}{V_r f R} \quad (\text{Equação 1.9})$$

Onde  $V_p$  é a tensão de pico da senoide,  $V_r$  é a tensão de ripple,  $f$  é a frequência da fonte e  $R$  é o resistor de carga. Elevando a capacitância de filtragem para  $100\mu\text{F}$  e substituindo na equação 1.9 temos um ripple de:

$$V_r = \frac{4.5}{(100 \times 10^{-6}) \times (150 \times 10^3) \times (100 \times 10^3)}$$

$$V_r = 3\mu\text{V}$$

O circuito equivalente é igual à forma final do circuito da figura 1.2 e tem a saída demonstrada na simulação a seguir:

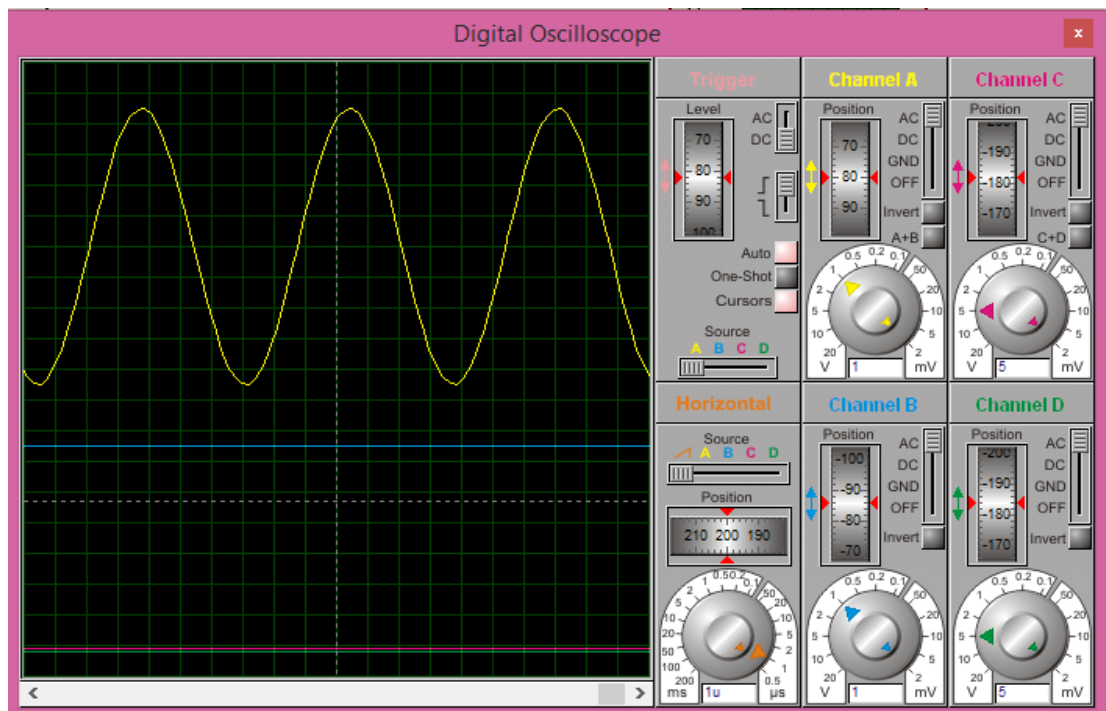


Figura 1.9 - Entrada completamente filtrada

<sup>21</sup> SEDRA, Smith. **Microeletrônica**. 5.ed, São Paulo: Pearson,2007. P.106.

Portanto pode-se observar que para um ripple tão pequeno a saída é uma corrente contínua, este valor contínuo da tensão é de extrema importância para a determinação do controle uma vez que se extingue uma possível não linearidade.

### 1.3 - SAÍDA

Apesar do arduino possuir cinco saídas analógicas todas são de PWM segundo Ramos e Wense PWM pode ser definido como: “PWM é a abreviatura para modulação por largura de pulso (pulse width modulation). Este sinal consiste de uma onda quadrada com frequência constante e largura de pulso variável.[<sup>22</sup>]” No PWM uma onda quadrada contínua é modulada onde intervalos de frequência são mantidos como na figura a seguir:

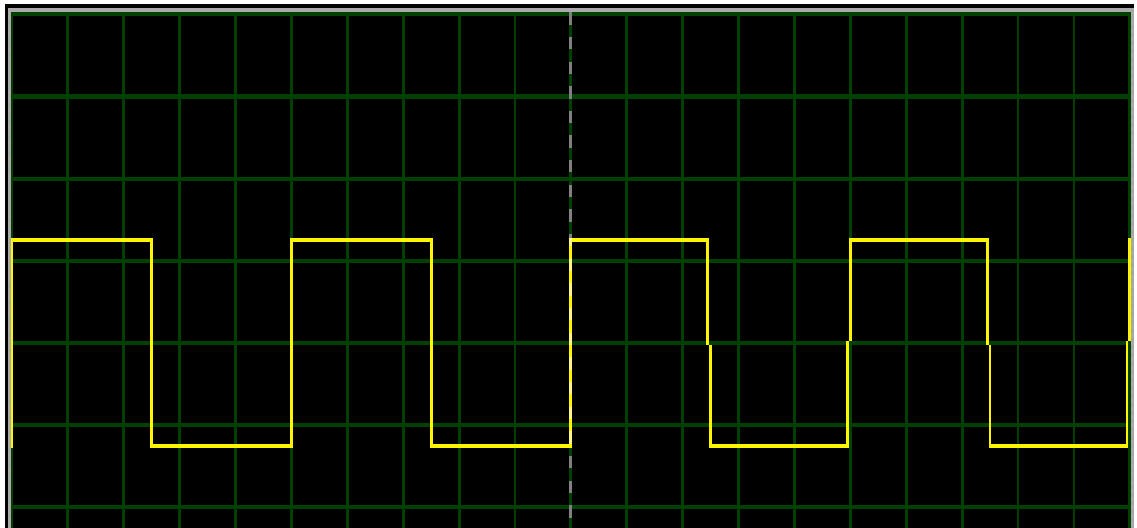


Figura 1.10 - Exemplo de sinal PWM.

A grande característica do PWM é ao invés de variar a tensão pela amplitude, os intervalos entre os pulsos são aumentados ou encurtados fazendo variar a energia do sinal e portanto a tensão.

<sup>22</sup> RAMOS, Adriano Peixoto, WENSE, Gabriel Lula Barros. **Sistema didático de nível de líquido**. Trabalho de conclusão de curso (Bacharel em engenharia do controle e automação). Brasília: UNB, 2008. Disponível em: <<http://lara.unb.br/~bauchspiess/tg/TG08%20Adriano%20P.%20Ramos%20e%20Gabriel%20L.B.%20Wense.pdf>>. Acessado em: 8 ago 2014. P.20.



Como o valor máximo de tensão e corrente do arduino são 5 volts e 40 mA respectivamente, a potência de saída é insuficiente para partir a bomba, para tanto um circuito com transistor foi implementado como demonstrado a seguir:

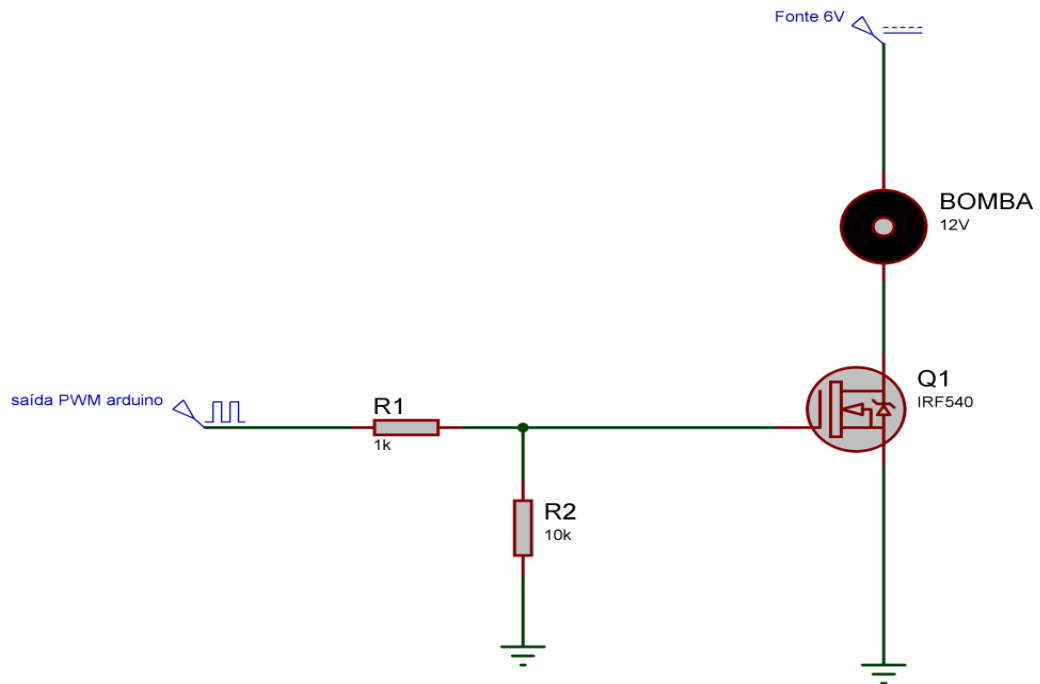


Figura 1.11 - Circuito de saída.

Este circuito teve como base o trabalho desenvolvido por Ramos e Wense<sup>[23]</sup> e o de Patané<sup>[24]</sup>, nele o transistor Q1 funciona como um relé de estado sólido amplificando o sinal de PWM para que seja compatível com o da bomba.

<sup>23</sup>RAMOS, Adriano Peixoto, WENSE, Gabriel Lula Barros. **OPUS**, Cit. P.7.

<sup>24</sup> PATANÉ, Edson João. **Implementação de controle de velocidade em malha fechada para motores de corrente contínua utilizando sistema de aquisição de dados**. Trabalho de conclusão de curso (grau de bacharel em engenharia elétrica). São Caetano do Sul. Disponível em: <[http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB0QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.maua.br%2Farquivos%2Fdissertacao%2Fh%2Fa1d7a5ba4952ecb686467f78fbe4a1c4&ei=NggtVMrQCceiNvDkgbgB&usq=AFQjCNG5ySEJpwQM12L1hS\\_4ocFq9VEAxQ&sig2=vz-s\\_2Rh-TrixRYkTpRXIA&bvm=bv.80120444,d.eXY](http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB0QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.maua.br%2Farquivos%2Fdissertacao%2Fh%2Fa1d7a5ba4952ecb686467f78fbe4a1c4&ei=NggtVMrQCceiNvDkgbgB&usq=AFQjCNG5ySEJpwQM12L1hS_4ocFq9VEAxQ&sig2=vz-s_2Rh-TrixRYkTpRXIA&bvm=bv.80120444,d.eXY)> Acessado em: 8 de Agosto 2014. P.50.

## 2 - MODELAGEM DE SISTEMAS DISCRETOS DE CONTROLE DE PROCESSOS

### 2.1 - Sistemas de controle discretos

A partir de meados da década de 60, com o surgimento do microcomputador e de toda a revolução do silício, temos presenciado ano após ano a acentuada disseminação de sistemas digitais, este salto tecnológico permitiu que sistemas de controle digitais fossem amplamente incorporados nas mais amplas aplicações da automação. Um sistema de controle discreto pode ser definido como um sistema onde o sinal de entrada é amostrado em períodos regulares de tempo, segundo Ogata as vantagens do uso de sistemas digitais podem ser enumeradas pelas seguintes qualidades:

Controladores digitais são capazes de realizar computações com precisão constante a grande velocidade. Computadores digitais podem ter quase qualquer grau de precisão nas computações com um aumento relativamente pequeno de custo. Por outro lado, o custo de computadores analógicos aumenta rapidamente quando aumenta a complexidade das computações, caso uma precisão constante deva ser mantida.<sup>[25]</sup>

Além disto, Ogata complementa:

Controladores digitais são extremamente versáteis. Fazendo um novo programa, podem-se modificar completamente as operações que estão sendo executadas. Esta característica é particularmente importante se o sistema de controle deve receber informação de operação ou instruções de algum centro de computação, onde uma análise econômica e de estudo de otimização estão sendo feitos.<sup>[26]</sup>

Das afirmativas pode-se destacar que em relação a controladores analógicos o digital tem uma precisão maior com menor custo uma vez que controladores analógicos mais precisos, quando utilizados amplificadores operacionais, torna-

---

<sup>25</sup> OGATA, katsushiko. **Opus cit.** P.702.

<sup>26</sup> OGATA, katsushiko. **Opus cit.** P.702.

senecessário redimensionar os amplificadores para ganhos maiores, ou utilizar amplificadores em cascata, na prática isto é ruim, pois o amplificador não amplifica apenas o sinal como também o ruído inerente a ele exigindo filtros corretivos, enquanto que um controlador digital, para aumento de precisão apenas é necessário colocar mais de um controlador em paralelo já que hoje em dia muitos microcontroladores são superescaláveis. Quanto à segunda afirmativa, a superioridade de controles digitais em relação a analógicos se torna mais evidente, pois se para um controlador analógico todo o circuito tem que ser refeito, para um controlador digital apenas a programação deve ser revista caso haja uma modificação na malha de controle tornado o controlador digital mais portátil.

Bem, se por um lado controladores digitais são mais precisos e portáteis, eles impõem ao projetista uma série de fatores que não estão presentes no projeto de um controle contínuo, tendo que relevar certos parâmetros presentes na abordagem clássica do controle, que é completamente formulada para controladores analógicos. Por isto apesar das mesmas técnicas de modelagem poderem ser empregadas no desenvolvimento de um controle digital, parâmetros pertinentes à amostragem do sinal também devem ser relevados exigindo uma nova abordagem matemática.

## **2.2. A transformada Z**

Se em um controle de tempo contínuo as equações diferenciais que modelam um sistema são expressas em transformada de Laplace em um sistema de tempo amostrado a função de transferência é modelada segundo a transformada Z do sinal. A transformada Z é resultante do próprio processo de conversão de analógico para contínuo. Para dedução da transformada Z, antes é preciso entender os dispositivos que são a entrada para o controlador digital que são os dispositivos de amostragem e retenção também conhecidos como amostradores e seguradores.

Em relação aos amostradores assim cita Ogata:

O elemento essencial de um sistema de tempo discreto é o amostrador. Em um amostrador convencional, uma chave se fecha para admitir um sinal de entrada a cada T segundos. Na prática, a

duração de amostragem é muito curta em comparação com a constante de tempo mais significativa do processo. Um amostrador converte um sinal contínuo em um trem de pulsos ocorrendo nos instantes de amostragem  $0, T, 2T, \dots$ , onde  $T$  é o período de amostragem.<sup>[27]</sup>

Algo relevante a ser dito é que em um amostrador entre os instantes de amostragem ele não transmite sinal nenhum, ou seja entre os instantes de amostragem o valor do sinal é zero.

É para corrigir este problema e completar o processo de amostragem que existe os seguradores cujo funcionamento é detalhado por Ogata:

Um dispositivo segurador converte o sinal amostrado em um sinal contínuo, que reproduz o sinal aplicado a um amostrador. O dispositivo segurador mais simples converte o sinal amostrado em um com amplitude constante entre dois instantes consecutivos de amostragem.<sup>[28]</sup>

O segurador que mantém um sinal amostrado constante é denominado de segurador de ordem zero.

Pode-se observar que mediante a uma entrada o amostrador colhe faixas do sinal e o segurador o torna contínuo até a próxima amostragem como pode ser visto na imagem a seguir:

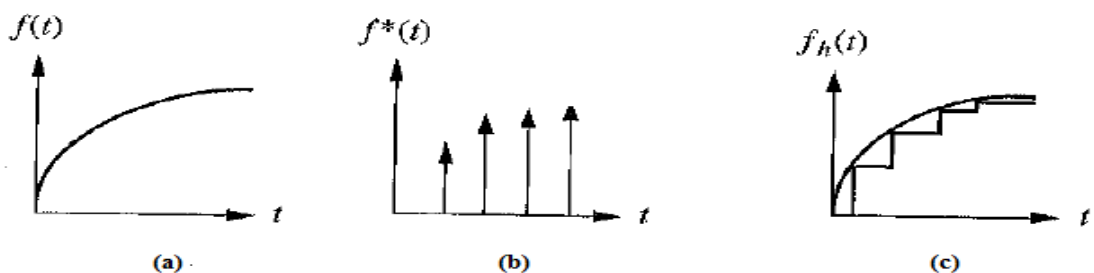


Gráfico 2.1 - (a) Entrada (b) Entrada no amostrador (C) entrada no segurador.(Nise, p 564)<sup>[29]</sup>

<sup>27</sup> OGATA, katsushiko. **Opus cit.** P.703.

<sup>28</sup>OGATA, katsushiko. **Opus cit.** P.703.

<sup>29</sup> NISE, Norman S.**Engenharia de sistemas de controle.** 3.ed, Porto Alegre: LTC,2002. P.562.

Observe que em cada instante de tempo  $T$  a amplitude do sinal se altera (isto ocorre pela comutação do amostrador) e dentro deste intervalo a amplitude de saída se mantém constante entre as faixas (devido ao segurador).

A partir daí pode-se deduzir que a função de transferência do sinal discreto no domínio do tempo é o somatório do produto de todos os impulsos unitários pela amplitude do sinal em cada intervalo de tempo como está expresso na equação:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \quad (\text{Equação 2.1})$$

Portanto supondo as seguintes amplitudes em um sinal amostrado em seu respectivo tempo:

$x(T)$	$T$
0	0
2	1
4	2
6	3

Tabela 2.1 - Sinais amostrados.

Obtemos  $x^*(t)$  como a seguinte equação:

$$x^*(t) = 2\delta(t - 1) + 4\delta(t - 2) + 6\delta(t - 3) \quad (\text{Equação 2.2})$$

Considerando a função impulso  $\delta$  (delta) em seus respectivos tempos  $(t-kT)$  a transformada  $Z$  é dada por:

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)Z^{-k} \quad (\text{Equação 2.3})$$

O que torna a equação 2.2 como:

$$x(Z) = 2Z^{-1} + 4Z^{-2} + 6Z^{-3} \quad (\text{Equação 2.4})$$

Disto pode-se concluir que dividindo a amplitude de cada intervalo amostrado por  $Z$  elevado ao instante de cada amostragem obtemos a transformada  $Z$  de um sinal.

### 2.3 - Aproximação digital de controladores analógicos

Contudo a modelagem de um sistema pelo método apresentado de transformada  $Z$ , implica que o projetista, antes de tudo tenha acesso a um instrumento que permita a análise do sinal e estabeleça para cada faixa de valores a sua respectiva transformada  $Z$ , porém por este método toda a análise fica demasiada complicada sendo mais fácil modelar um sistema em tempo contínuo pela transformada de laplace e depois devidamente converter para o tempo discreto, esta operação também se justifica pela facilidade que ela nos dá na criação do projeto uma vez que todas as técnicas aplicadas a sistemas de controle contínuo podem ser usadas, vários métodos de aproximação existem ao qual podemos citar três que são o método de Euler (ou método de diferença para frente), método de diferenças para trás e método de aproximação de Tustin (ou transformação bilinear).

No método de Euler a derivada primeira do tempo de uma função é aproximada da seguinte forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+T) - x(t)}{T} \quad (\text{Equação 2.5})$$

Calculando a transformada de laplace para o lado esquerdo e a transformada  $Z$  no lado direito temos:

$$SX(S) \approx \frac{X(Z)Z - X(Z)}{T}$$

Simplificando obtemos:

$$SX(S) \approx \frac{(Z - 1)X(Z)}{T}$$

Considerando  $X(S)$  aproximadamente igual a  $X(Z)$  podemos determinar:

$$S \approx \frac{Z - 1}{T} \quad (\text{Equação 2.6})$$

O método de diferença para frente é dado por:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t - T)}{T} \quad (\text{Equação 2.7})$$

Igualmente ao outro método aplicamos ambas as transformadas aos dois lados da equação e obtemos:

$$SX(S) \approx \frac{X(Z) - Z^{-1}X(Z)}{T}$$

Simplificando:

$$SX(S) \approx \frac{(1 - Z^{-1})X(Z)}{T}$$

Multiplicando por  $Z^{-1}$  no numerador e no denominador:

$$SX(S) \approx \frac{(Z - 1)X(Z)}{ZT}$$

Por fim considerando  $X(S)$  igual a  $X(Z)$  obtemos:

$$S \approx \frac{Z - 1}{ZT} \quad (\text{Equação 2.8})$$

A dedução do método de aproximação de Tustin não é tão intuitivo quanto o de Euler e o de diferenças para frente sendo dado por:

$$S = \frac{2}{T} \cdot \frac{Z - 1}{Z + 1} \quad (\text{Equação 2.9})$$

A importância das equações 2.6, 2.8 e 2.9 se torna evidente à medida que se pode proceder o projeto de um sistema de controle como se fosse analógico e em seguida, ao fim dos cálculos converte-lo para um sistema digital.

## 2.4 - Resolução mínima para conversor A/D e D/A

No projeto de um controlador digital um ponto crítico e de extrema importância é a resolução dos conversores A/D (para a entrada) e D/A (para a saída), este cuidado se deve à discrepância que existe entre a resolução do dispositivo que opera o controle (no caso deste trabalho um microcontrolador) e os computadores do centro de comando, que irão receber e trabalhar os dados obtidos, isto pode ser melhor explicado por Prado:

Atualmente, a resolução dos conversores D/A é em torno dos 10 bits e dos conversores A/D é de 8 a 16 bits. Comparando-se à quantidade de bits geralmente utilizada para números representados em ponto flutuante, de 32 a 64 bits, pode-se concluir que a precisão de tais conversores terá grande influência no desempenho de sistemas controlados por computador. Assim, o projetista do sistema de controle precisa entender as implicações da resolução limitada dos conversores A/D e D/A.<sup>[30]</sup>

O que se pode entender da citação de Prado é que há uma diferença grande entre a resolução de um microcontrolador e um computador, enquanto um tem resolução de 8 a 16 bits o outro possui de duas a quatro vezes a resolução de um microcontrolador, isto implica que apesar da precisão de ponto flutuante de um computador ser grande a de um microcontrolador é baixa causando uma lacuna entre o dispositivo de controle e o supervisor. Esta defasagem de tecnologia se explica pelo paradigma da indústria de ter um dispositivo que seja eficaz e economicamente viável, ainda que não muito eficiente.

Ainda segundo Prado: “O nível de quantização no conversor A/D é obtido dividindo-se a faixa de variação da tensão analógica pelo número de combinações

---

<sup>30</sup> PRADO, Thiago Alexandre. **Implementação de um controlador PID embarcado para o controle em malha fechada de um estimulador neuromuscular funcional.** (Grau de mestre em engenharia elétrica) UNESP. Disponível em: <<http://base.repositorio.unesp.br/handle/11449/87062>>. Acessado em: 8 de Agosto 2014. P.27.



possíveis fornecida pela quantidade de bits do conversor.<sup>[31]</sup> Isto pode ser melhor entendido observando a equação:

$$Nq = \frac{\Delta V}{2^{bits}} \quad (\text{Equação 2.10})$$

Considerando o Atmega328, que é o microcontrolador implantado no arduino UNO sua resolução é de 10 bits e sua faixa de valores de tensão é de 0 a 5 volts e portanto temos o nível de quantização de:

$$Nq = \frac{5 - 0}{2^{10}}$$

Que nos dão o valor final de:

$$Nq = 4,883mV$$

O nível de quantização causa ondulações indesejadas em um processo isto pode ser claramente visto no experimento como na figura a seguir:

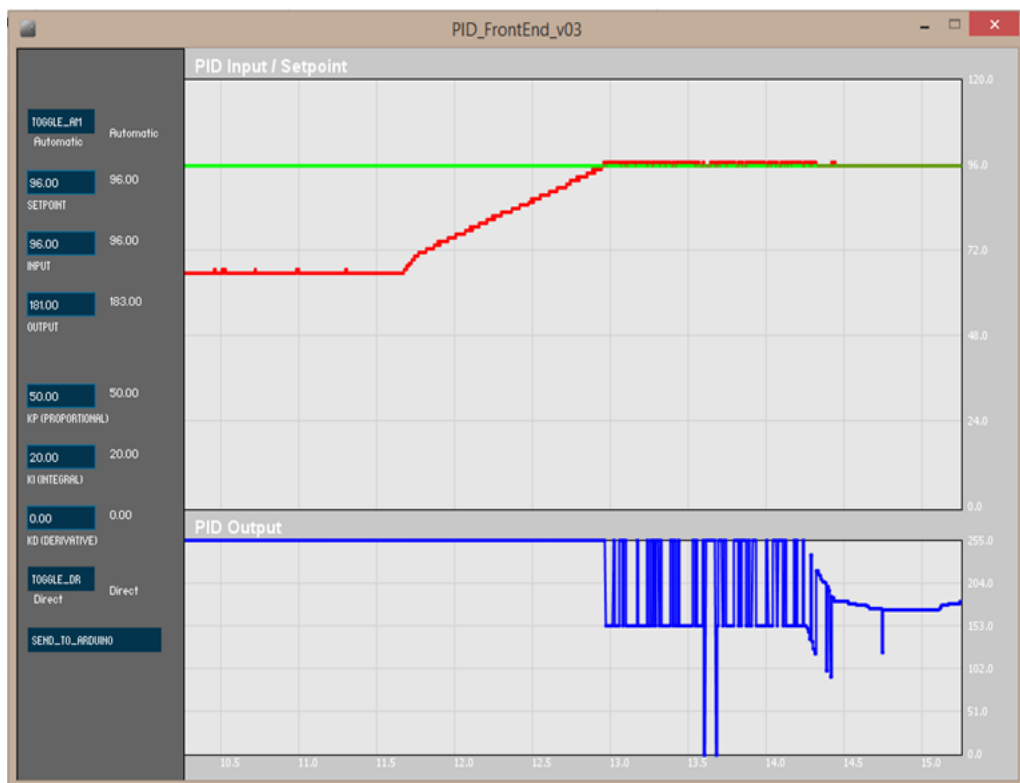


Gráfico 2.2 - Teste1.

<sup>31</sup> PRADO, Thiago Alexandre. **OPUS cit.** P.27.

Note que apesar da resposta do controle ter chegado ao valor final ele oscila periodicamente, o valor desta oscilação é exatamente igual ao do nível de quantização. Aproximando a imagem do gráfico para valores menores pode-se ver melhor:



Gráfico 2.3 - Teste 2

Novamente no gráfico cada valor de oscilação dado na escala em 1 corresponde a 4,883mV.

A respeito do nível de quantização Prado complementa:

Desta forma, a estimativa da resolução mínima necessária para o conversor A/D está ligada à precisão na saída do processo a ser controlado. Ou seja, a resolução mínima do conversor A/D deve ser escolhida tal que seu nível de quantização seja menor que a precisão desejada.<sup>[32]</sup>

Da citação podemos entender que para um sistema de controle cuja precisão deva ser milimétrica, o ajuste do nível de quantização deve ser considerado, porém no presente projeto implementado o nível de quantização é considerado aceitável, porém, caso seja, necessário uma precisão exata o número de bits pode ser dado por:

<sup>32</sup> PRADO, Thiago Alexandre. **OPUS cit.** P.27.

$$bits_{AD} = -\log_2 \left( \frac{\Delta V}{precisão} \right)$$

(Equação 2.11)

Quanto à resolução do conversor D/A de saída Prado diz: “O erro de quantização do conversor D/A é amplificado pelo ganho estático da planta do processo. Assim, a equação para o cálculo da resolução mínima do conversor A/D não é suficiente para o conversor D/A.”<sup>33</sup> Ainda neste sentido ele complementa: “O nível de quantização de um conversor D/A deve ser multiplicado pelo ganho estático do processo para poder estimar o erro devido à quantização do mesmo.” O que se pode concluir é que mesmo para o conversor A/D de entrada o conversor D/A de saída do processo influencia as oscilações na malha de controle estando diretamente ligado ao ganho de estado estacionário da planta por:

$$bits_{DA} = -\log_2 \left( \frac{\Delta V * ganho}{precisão} \right)$$

(Equação 2.12)

## 2.5 - O controlador PID em sistemas digitais

Quando implementado digitalmente um controlador PID deve ser revisado quanto suas equações na forma contínua, em relação ao tempo o efeito da implantação deste controlador também trás uma série de efeitos indesejados que estão diretamente ligados às equações que o modela. Inicialmente observemos o PID em relação ao tempo:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) \partial t + K_p T_d \frac{\partial e(t)}{\partial t}$$

(Equação 2.13)

Onde:

- $K_p$  é o ganho proporcional;
- $e(t)$  é o erro;

<sup>33</sup> PRADO, Thiago Alexandre. **OPUS cit.** P.27.

- $T_i$  é o tempo integral;
- $T_d$  é o tempo diferencial;

Sendo que  $K_i$  e  $K_d$ , respectivamente são dados por:

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (\text{Equação 2.14})$$

$$K_d = K_p * T_d \quad (\text{Equação 2.15})$$

Uma vez que um microcontrolador é uma máquina seqüencial e a cada iteração um novo valor é comutado um algoritmo pode ser pensado para modelar a equação 2.13. Em relação ao erro fazendo subtrações sucessivas do sinal de entrada do setpoint com o do sensor é possível obtê-lo a cada período de amostragem e em relação às derivadas do tempo elas podem ser obtidas numericamente pelos métodos já descritos (método de Euler, Tustin e diferenças para trás).

Passando para o domínio da freqüência obtemos:

$$PID(S) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S \right) \quad (\text{Equação 2.16})$$

Em tempo discreto Prado<sup>[34]</sup> nos dá:

$$PID(Z) = K_p \left( 1 + \frac{T_d}{T_s} \cdot (1 - Z^{-1}) + \frac{T_s}{T_i} \cdot \frac{1}{1 - Z^{-1}} \right) \quad (\text{Equação 2.17})$$

Em virtude da discretização do PID em função do tempo dois problemas surgem em se tratando do ganho integrativo e derivativo, quanto ao integrativo Prado assinala: “No cálculo do termo integrativo, pode ocorrer um erro de offset causando no processo um erro de regime. Este erro é ocasionado quando o processador utiliza um tamanho de palavra pequeno.<sup>[35]</sup>” Se referindo à integral do erro presente na parte integrativa do PID na equação 2.13 Prado complementa:

<sup>34</sup>PRADO, Thiago Alexandre. **OPUS cit.** P.37.

<sup>35</sup> PRADO, Thiago Alexandre. **OPUS cit.** P.30.

A segunda parcela da equação contém o chamado termo de correção e este é o responsável por fornecer erro de regime nulo. Este termo de correção [...], pode ser desprezado nos cálculos efetuados pelo processador devido ao erro de arredondamento. Assim, o termo integral, responsável por anular o erro de regime permanente, pode-se apresentar ineficiente caso seja utilizado baixa resolução.<sup>[36]</sup>

O que Prado quis dizer é que em geral o erro sempre tende a um valor pequeno, caso a resolução seja insuficiente para representar sua magnitude o termo integrativo pode se tornar irrelevante para o sistema.

Quanto ao problema inerente à parte derivativa Prado cita: “No cálculo do termo derivativo há que se considerar um aspecto prático simples, mas muito importante. Sabendo-se que o cálculo do termo derivativo é baseado na derivada do erro entre o sinal desejado  $r(t)$  e a saída do processo  $y(t)$ .<sup>[37]</sup>” Dando prosseguimento ao raciocínio consideremos a equação:

$$\frac{d e(t)}{dt} = \left[ \frac{d r(t)}{dt} - \frac{d y(t)}{dt} \right]$$

(Equação 2.18)

Então Prado complementa:

O sinal desejado  $r(t)$  é normalmente constante com mudanças abruptas. Ou seja, este não contribui para o termo derivativo. Porém, o termo  $dy(t)/dt$  irá mudar drasticamente quando o sinal desejado é alterado. Por esta razão, é comum, na prática, aplicar a ação derivativa somente à saída do processo.<sup>[38]</sup>

O que Prado diz é que as oscilações provenientes do sensor podem se tornar grandes o suficiente para suplantar o sinal de entrada do setpoint e tornar o termo derivativo alto, o contrário também é válido caso haja uma brusca alteração do sinal de amplitude.

<sup>36</sup> PRADO, Thiago Alexandre. **OPUS cit.** P.30.

<sup>37</sup> PRADO, Thiago Alexandre. **OPUS cit.** P.31.

<sup>38</sup> PRADO, Thiago Alexandre. **OPUS cit.** P.31.

Este comportamento abrupto e instável também foi observado nos experimentos feitos o que justificou o cancelamento da parte derivativa.

Com tudo pode-se concluir que a resolução do microcontrolador influi diretamente no comportamento do sistema, em geral controladores industriais possuem DSP's embarcados para corrigir tais erros o que não é presente em microcontroladores em especial o arduino que possui seus componentes já integrados em sua placa.

### 3 - O PROJETO DO CONTROLE

#### 3.1 - Obtenção experimental da função de transferência

Segundo Ogata a função de transferência de um sistema é definida como:

A função de transferência de um sistema linear invariante no tempo é definida como sendo a relação da transformada de Laplace da saída (função resposta) para a transformada de Laplace da entrada (função excitação), considerando-se nula as condições iniciais. [<sup>39</sup>]

Nem sempre dada a complexidade de um sistema ou a falta de parâmetros para equacioná-lo a função de transferência pode ser obtida de forma analítica, Nise defende:

Freqüentemente não é possível ou prático obter analiticamente a função de transferência de um sistema. Possivelmente o sistema é fechado e as partes componentes não são identificáveis facilmente. Como a função de transferência é uma representação do sistema relacionando a entrada com a saída, a resposta do sistema ao degrau pode levar à obtenção de uma representação mesmo que não seja conhecida a construção interna. Com uma entrada em degrau, podemos medir a constante de tempo e o valor de estado estacionário, a partir de cujos valores podem calcular a função de transferência. [<sup>40</sup>]

Desta forma, um sistema pode ser tratado como uma caixa preta da qual nada se sabe e apenas aplicando uma entrada ao degrau é possível obter um gráfico de resposta com o qual se extrai parâmetros para modelá-lo matematicamente. Aplicando este método obtemos:

---

<sup>39</sup> OGATA, Katsuhiko. **OPUS cit.** P.79.

<sup>40</sup> NISE, Norman S. **OPUS cit.** P.127.

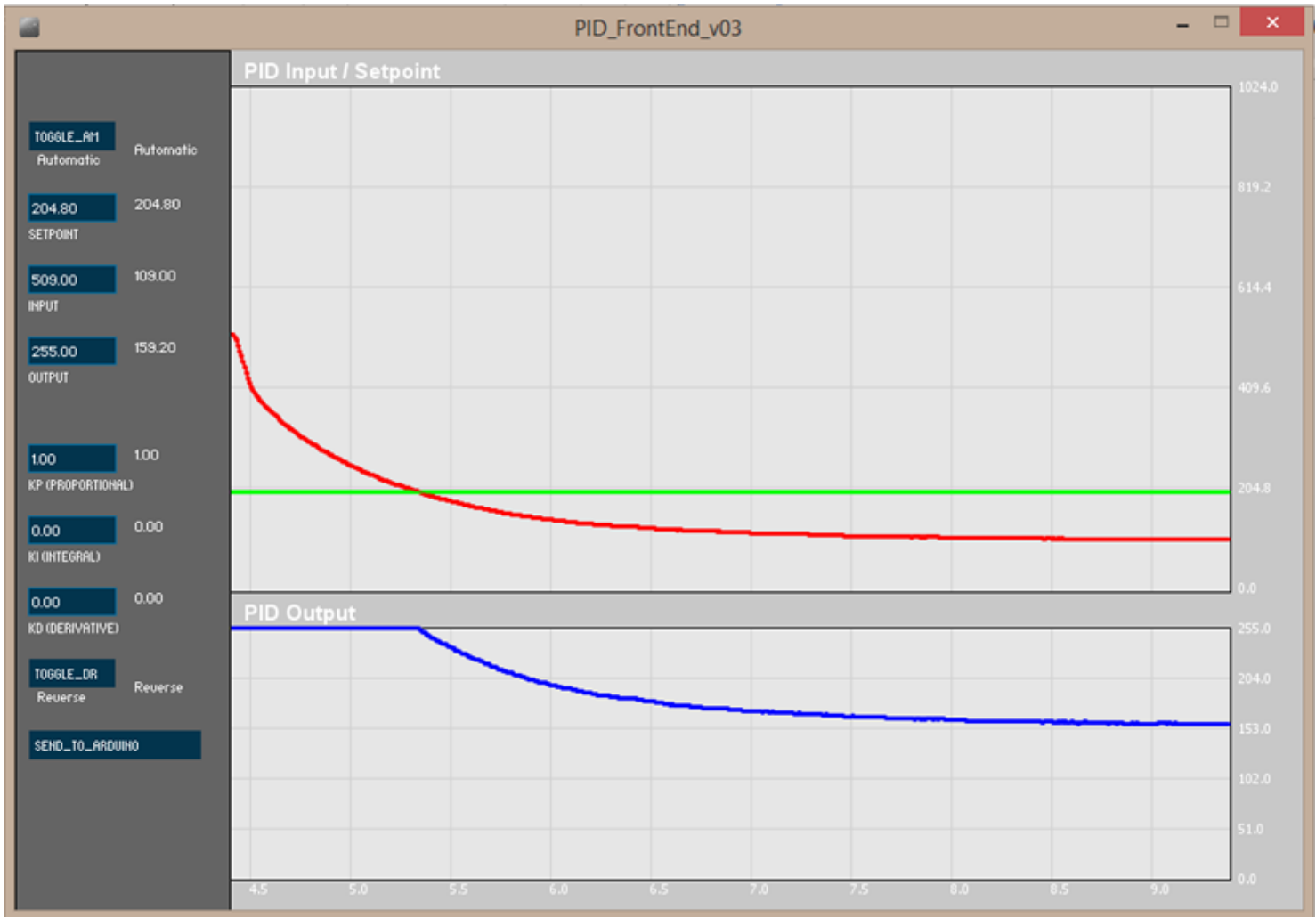


Gráfico 3.1 - Resposta natural do sistema.

Antes é preciso atentar que a imagem foi obtida utilizando o software PID\_FrontEnd\_V03 obtido no site: <http://playground.arduino.cc/Code/PIDLibrary>, de autoria de Brett Beauregard, com o qual, juntamente se encontra o algoritmo em C que foi implementado no arduino para que fosse feito o experimento.

Deve-se considerar que o arduino não lê diretamente o nível, porém a tensão. Nele os níveis de tensão são dados em uma escala de 0 a 1023 que correspondem aos dez bits de resolução em binário que são convertidos para decimal ( $2^{10}=1024$ ). Cada bit corresponde a 4,883 mV.

Além disto a relação entre o nível de água no sensor e a tensão lida é inversamente proporcional o que torna a resposta do sistema inversa, ou seja o nível zero do reservatório corresponde ao valor de 529 que equivale a 2,856V, enquanto que para o nível cheio lemos 83 que equivale a 0,4057V.



### 3.2 - Extraíndo a função do gráfico

Analisando o gráfico 3.1 pode-se constatar que a forma deste é igual à de um sistema de primeira ordem. A função de transferência de um sistema de primeira ordem é dada segundo Nise<sup>[41]</sup> pela seguinte equação:

$$C(S) = \frac{K}{S + a} \quad (\text{Equação 3.1})$$

Onde K é o ganho em estado estacionário e a é frequência exponencial. Sabendo que a é igual ao inverso da constante de tempo do sistema e que a constante de tempo T equivale ao instante em que a amplitude do sinal atinge 63% de seu valor final obtemos no gráfico que esta (a constante de tempo) é igual a 0,5 da qual se obtém o parâmetro a por:

$$a = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,5} = 2s \quad (\text{Equação 3.2})$$

Em relação à amplitude, como seu gráfico é decrescente foi feita uma série de alterações para que sua análise procedesse como se este fosse crescente, tal medida não influencia nos resultados finais uma vez que apenas o sinal do erro dita se o sinal será crescente ou decrescente.

Inicialmente consideramos que o nível máximo foi medido como 83 sendo este considerado o zero do sistema e o nível mínimo 529, além disto foi forçada uma resposta deslocando o sinal de 527 para 109.

A título de simplificação, para que se analisasse o gráfico de forma crescente foi subtraído 529 por todos os valores, então o nível mínimo do sistema de 529 passou a ser 0 (529-529), o nível máximo passou a ser 446 (529-83), e os valores do deslocamento passaram a ser de 2 (529-527) e 420 (529-109).

---

<sup>41</sup> NISE, Norman S. **OPUS cit.** P.129.

Nise [42] também fornece que o  $K/a$  é igual ao valor final obtido no sistema com o qual se obtém:

$$\frac{K}{a} = 420 \quad (\text{Equação 3.3})$$

Portanto:

$$K = 420 \cdot 2 = 840$$

A partir daí a função de transferência em malha fechada pode ser obtida pela equação 3.1:

$$C(S) = \frac{840}{S + 2} \quad (\text{Equação 3.4})$$

Convertendo  $C(S)$  para valores de tensão obtemos:

$$C(S) = \frac{4,10557}{S + 2} \quad (\text{Equação 3.5})$$

Plotando a equação 3.5 obtemos o gráfico:

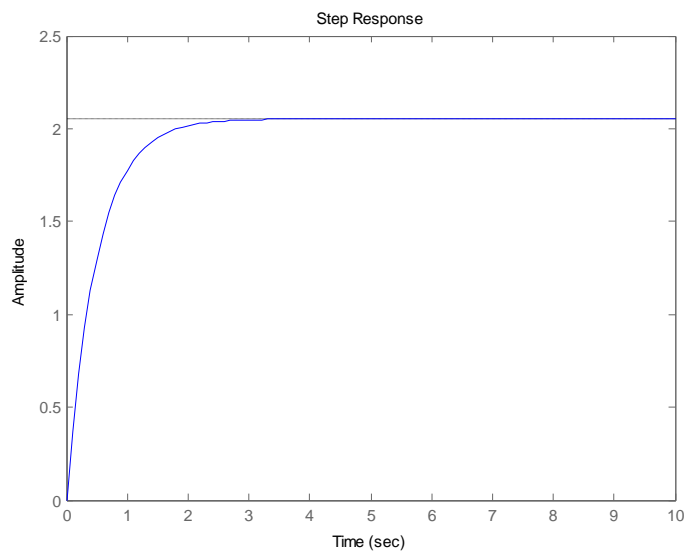


Gráfico 3.2 - Resposta natural no Matlab.

<sup>42</sup>NISE, Norman S. **OPUS** cit.P.127.

Experimentalmente foi obtida uma sintonia levando em consideração um ganho de 10,24 e obtemos a seguinte resposta:

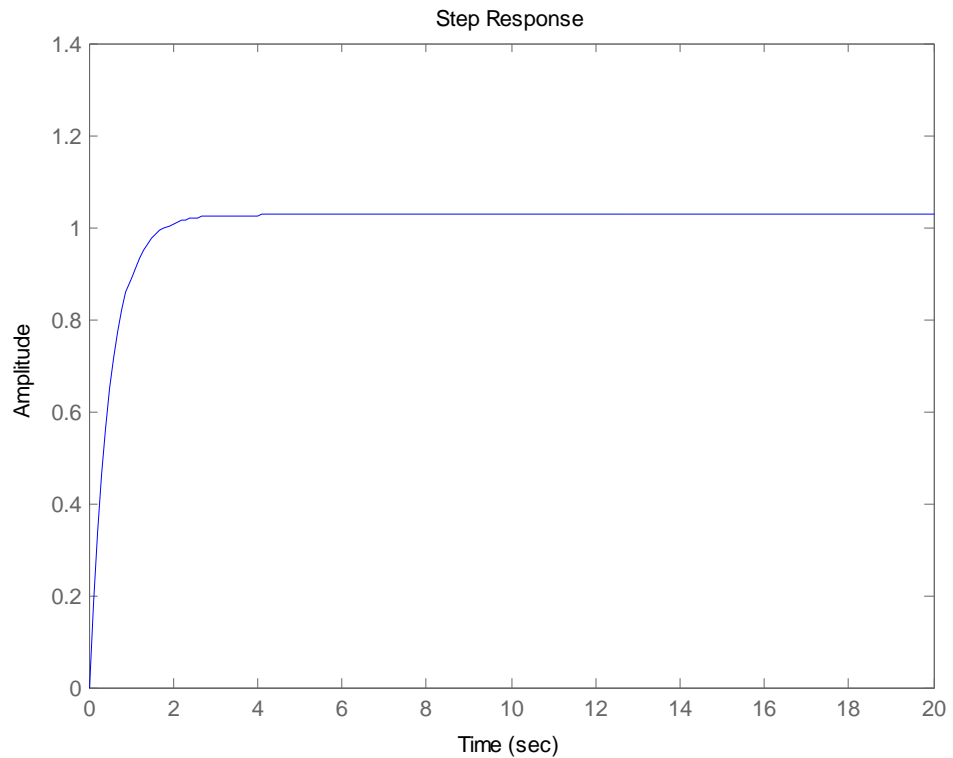


Gráfico 3.3 - Resposta sintonizada no Matlab.

Para quaisquer valores de  $K_i$  e  $k_d$  o sistema se mostrou instável.

### 3.3 - Conclusão

Por fim pode-se concluir que o controlador PID é uma excelente opção para a aplicação sugerida que é o desenvolvimento de um controlador automático de nível, se mostrando um excelente algoritmo de controle e fácil de ser implementado. Surpreendentemente nem todos os três ganhos foram necessários para estabilizar a malha de controle, uma vez que a resposta de saída da planta foi de um sistema de primeira ordem bastando apenas um ganho proporcional para reduzir o erro de estado estacionário.

Contudo também foi observado durante os testes um leve atraso na resposta da bomba, fazendo o nível oscilar 4mm entre o instante de abrir e fechar a válvula. Este sobre sinal é inerente ao vácuo que se formou na saída da tubulação da bomba, desta forma, ao se formar um vácuo na tubulação o sistema gerava um atraso até a água percorrê-la e chegar até o tanque.

Outra causa para o erro se deve ao fato que o controle compensa as perdas de água que são medidas pela variação de altura do líquido no tanque, ou seja, o sensor depende da variação da altura do nível para que o controle compense as perdas. Para aperfeiçoar ainda mais o controle e tornar este ainda mais estável pode-se em trabalhos futuros colocar um sensor de vazão retroagindo na malha junto ao sensor capacitivo de forma que o sistema não oscile os 4 mm observados e permaneça sempre estável diante do distúrbio da válvula.

### **3.4 - Proposta de trabalhos**

Para trabalhos futuros é possível aprimorar o controle para um servossistema onde a posição do nível d'água pode ser controlada e desenvolver um controle para dois tanques, além de aprimorar o controle do nível adicionando um sensor de vazão.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAUJO, André Luiz. **Desenvolvimento de sensor de nível capacitivo para controle de processos através do CLP micrologix 1500**. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em engenharia elétrica). Vitória: UFES, 2007. Disponível em: < [http://www2.ele.ufes.br/~projgrad/documentos/PG2007\\_1/andreluizaraujo.pdf](http://www2.ele.ufes.br/~projgrad/documentos/PG2007_1/andreluizaraujo.pdf)> Acessado em: 8 ago 2014.

BEZERRA, Matheus Sales. **Projeto, implementação e ensaios de um controlador PID utilizando FPGA**. Trabalho de conclusão de curso (Bacharel em engenharia elétrica). Fortaleza: Universidade federal do ceará. Disponível em: <<http://www.dee.ufc.br/anexos/TCCs/2010.1/MATHEUS%20SALES%20BEZERRA.pdf>> Acessado em: 17/10/2014.

DORFF, Richard C., BISHOP, Robert H. **Sistemas de controle moderno**. 8.ed., Rio de Janeiro: LTC, 2001.

FACCIN, Flávio. **Abordagem inovadora no projeto de controladores PID**. Dissertação de mestrado (Mestrado em engenharia elétrica). UFRGS, 2004. Disponível em: <[http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/12544/000626885.pdf?sequence=1&locale=pt\\_BR](http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/12544/000626885.pdf?sequence=1&locale=pt_BR)> Acessado em: : 8 ago 2014.

MELO, Gustavo Amaral Ferreira de, BERNARDES, Mariana Costa. **Instrumentação e controle de uma maquete de nível de líquido com quatro tanques interligados**. Trabalho de conclusão de curso (bacharelado em engenharia mecatrônica). Brasília: UNB, 2006. Disponível em: <<http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB8QFjAA&url=http%3A%2F%2Flara.unb.br%2F~gaborges%2Farquivos%2Fpf.mariana.bernardes.gustavo.melo.2005.2.pdf&ei=ueMAVKW2FLHnsASxjYLICw&usg=AFQjCNG6hQcWui4uo9nHpsOUT7XBdwmBSQ&bvm=bv.74115972,d.cWc>> Acessado em: 8 ago 2014.

MESQUITA, Brehme D. R. de, SILVA, Jefferson A. L. e, FERREIRA, André M. D. **Comparação entre controladores PID clássico e PID fuzzy com ganho programado no sistema de azimute.** IFPA, 2012. Disponível em: <[http://www.academia.edu/3854982/Comparacao\\_entre\\_controladores\\_PID\\_classico\\_e\\_PID\\_fuzzy\\_com\\_ganho\\_programado\\_no\\_sistema\\_de\\_azimute](http://www.academia.edu/3854982/Comparacao_entre_controladores_PID_classico_e_PID_fuzzy_com_ganho_programado_no_sistema_de_azimute)> Acessado em: 8 ago 2014.

NISE, Norman S. **Engenharia de sistemas de controle.** 3.ed, Porto Alegre: LTC,2002.

OGATA, katsushiko. **Engenharia de controle moderno.**4. Ed., Rio de janeiro: Prentice Hall, 2003.

PATANÉ, Edson João. **Implementação de controle de velocidade em malha fechada para motores de corrente contínua utilizando sistema de aquisição de dados.** Trabalho de conclusão de curso (grau de bacharel em engenharia elétrica). São Caetano do Sul. Disponível em:<[http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB0QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.maua.br%2Farquivos%2Fdissertacao%2Fh%2Fa1d7a5ba4952ecb686467f78f8be4a1c4&ei=NqgtVMrQCceiNvDkqbgB&usq=AFQjCNG5ySEJpwQM12L1hS\\_4ocFq9VEAxQ&sig2=vz-s\\_2Rh-TrixRYkTpRXIA&bvm=bv.80120444,d.eXY](http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB0QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.maua.br%2Farquivos%2Fdissertacao%2Fh%2Fa1d7a5ba4952ecb686467f78f8be4a1c4&ei=NqgtVMrQCceiNvDkqbgB&usq=AFQjCNG5ySEJpwQM12L1hS_4ocFq9VEAxQ&sig2=vz-s_2Rh-TrixRYkTpRXIA&bvm=bv.80120444,d.eXY)> Acessado em: 8 de Agosto 2014.

PRADO, Thiago Alexandre. **Implementação de um controlador PID embarcado para o controle em malha fechada de um estimulador neuromuscular funcional.** (Grau de mestre em engenharia elétrica) UNESP. Disponível em:<<http://base.repositorio.unesp.br/handle/11449/87062>>. Acessado em: 8 de Agosto 2014.

RAMOS, Adriano Peixoto, WENSE, Gabriel Lula Barros. **Sistema didático de nível de líquido.** Trabalho de conclusão de curso (Bacharel em engenharia do controle e automação). Brasília: UNB,2008. Disponível em:

<<http://lara.unb.br/~bauchspiess/tg/TG08%20Adriano%20P.%20Ramos%20e%20Gabriel%20L.B.%20Wense.pdf>>. Acessado em: 8 ago 2014.

SEDRA, Smith. **Microeletrônica**. 5.ed, São Paulo: Pearson,2007.

YAMAMOTO, Guilherme kenji, AZEVEDO, Renan Airoso de. **Aplicações da indústria que utilizam controle PID**. Saber eletrônica. São Paulo, ano 50, n.475, jan-fev 2014.