

ITC - INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CARATINGA

WENDERSON PASCOALATO PAULA

**ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS DE
CÁLCULO EM LAJES**

**BACHARELADO
EM
ENGENHARIA CIVIL**

**DOCTUM - CARATINGA / MG
2016**

ITC - INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CARATINGA

**ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS DE
CÁLCULO EM LAJES**

Monografia apresentada à banca examinadora da faculdade de Engenharia Civil do Instituto Doctum de Educação e Tecnologia, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Bacharel em engenharia Civil.

Prof. Orientador: José Nelson Vieira da Rocha

DOCTUM – CARATINGA/MG
2016

TERMO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DO TRABALHO

COMPARATIVO DE MÉTODOS DE CÁLCULO EM LAJES

Nome completo do aluno: WENDERSON PASCOALATO PAULA

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado perante a Banca de Avaliação composta pelos professores José Salvador Alves, José Nelson Vieira da Rocha e Bárbara Dutra da Silva, às 21 horas do dia 12 de julho de 2016, como requisito parcial para a obtenção do título de bacharel em Engenharia Civil. Após a avaliação de cada professor e discussão, a Banca Avaliadora considerou o trabalho: Aprovado (aprovado ou não aprovado), com a qualificação: Excelente (Excelente, Ótima, Bom, Satisfatório ou Insatisfatório).

Trabalho indicado para publicação: SIM () NÃO

Caratinga, 12 de julho de 2016

José Nelson Vieira da Rocha.
Professor Orientador e Presidente da Banca

José Salvador Alves
Professor Avaliador 1

Bárbara Dutra da Silva
Professor Avaliador 2

Wenderson Pascoalato Paula
Aluno(a)

[Assinatura]
Coordenador(a) do Curso

*Dedico essa conquista às memórias de meu pai
e ao meu filho, Gabriel Pascoalato.*

AGRADECIMENTOS

Aos mistérios dos ensinamentos dos meus pais, que mesmo não tendo passado sequer uma fase de suas infâncias nas escolas me inspiraram e me proporcionaram esta dádiva. Agradeço a todas as forças que conspiraram para isso, desde minha educação básica, todos os professores que tive, às influências de meus amigos que por menores que elas fossem, já foram significativas. Ao professor Sérgio Alves dos Reis, que pelo simples sistema de ensino me proporcionou perseverar para alcançar o dia de hoje em que escrevo tais agradecimentos. Ao orientador José Nelson Vieira, vale ressaltar a sua disposição o qual proporcionou um ótimo desenvolvimento do trabalho. Ao professor Douglas Borges, Bárbara Dutra, e José Salvador, por todas as dicas as quais foram de extrema importância no desenvolvimento. À minha esposa e filho dedico a minha existência em agradecimento, por todos os momentos em que me passaram a confiança e tarefa de seguir em frente; à Rosângela que me ensinou as tarefas da escola, à Valdinei que me ensinou à escrever o meu nome, à Solange que me deu as melhores férias possíveis, à Valdeci que me inspirou em alguns momentos, à Claudinei que me proporcionou o gosto pela leitura e escrita, e à Wanderson pelas diversas ajudas e pela segurança de ter o seu apoio quando precisasse e em qualquer das graduações impostas pela vida. Devo lembrar de todos os mestres que me ensinaram esta ciência, que me inspiraram e continuarão. Obrigado a todos.

Wanderson Pascoalato Paula.

“O que eu lembro é que seu pai falava que menino tem que estudar”

Cleuza Maria Pascoalato de Paula (Minha mãe).

RESUMO

A escolha de uma melhor ferramenta de cálculo de estruturas é importante pois permite ao engenheiro diante de um desafio estrutural, uma apresentação adequada das soluções de cálculo, visando as melhores condições conforto, durabilidade e utilização da obra dimensionada, uma solução que harmonize a arquitetura e viabilidade econômica. Este trabalho tem o objetivo de apresentar os métodos de cálculo, como ferramentas para a análise de momentos fletores em lajes visando o melhor entendimento dos métodos de cálculo supracitados ao longo do desenvolvimento. Dará foco na verificação das ações, dispostas em uma estrutura de concreto armado conforme as tipologias de lajes especificadas na NBR 6118/2014. O trabalho consiste em formular e dimensionar uma estrutura hipotética, além de apresentar os resultados obtidos em outros estudos semelhantes. No desenvolvimento serão apresentadas as considerações para todas as variantes potenciais comprometedoras da qualidade da estrutura, que são fatores como: Classe do concreto, massa específica, resistência a tração, limites de compressão dentre outros, para que assim, ao decorrer da leitura faça-se o entendimento dos métodos de cálculo estruturais. A partir do estudo de caso apresentará como resultado final de estudo as diferenças percentuais para fatores como, diferenças entre os métodos para os momentos fletores positivos e negativos dimensionados.

Palavras Chave: Cálculo, Lajes, Métodos Simplificados, Analogia de Grelha.

ABSTRACT

The choice of a better structural calculation tool and important because it allows the engineer before hum structural challenge proper presentation of calculation solutions , aiming best conditions comfort , durability and use of scaled work , a solution que harmonize architecture and economic viability . This study aims to present the calculation methods for the analysis of bending moments in slabs aimed at better understanding the above calculation methods throughout the development. Will focus on verification of actions arranged in a reinforced concrete structure as the slabs of types specified in NBR 6118/2014, and present the conclusions necessary structural feasibility of adopting each method of calculation and economic feasibility considerations if we adopt as the basis for sizing equipment for each method. The work is to develop and scale a hypothetical structure, and present the results in a similar study. The development will be presented considerations for all potential variants compromising the structure quality, which are factors such as concrete class, density, thermal expansion, tensile strength, fatigue, compression limits and others, so it makes to importance of understanding the structural calculation methods. From the case study presents as the final result of the study the percentage differences for factors such as differences between the methods for positive bending moments, bending negative moments among others.

Keywords : Calculation , Slabs, Simplified Methods , Analogy grid

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Curva estatística de Gauss.....	22
Figura 2- Ensaio de tração direta.....	23
Figura 3- Ensaio de compressão diametral.....	23
Figura 4- Ensaio de flexão de vigas.	24
Figura 5- Deformação transversal e longitudinal do concreto.	26
Figura 6- Diagrama de tensão/deformação.....	27
Figura 7- Elemento Linear- Viga.....	28
Figura 8 - Esquema de carregamento em placas, elemento linear bidimensional.....	29
Figura 9 - Elemento Linear Casca.....	29
Figura 10- Esquema de carregamento nas Chapas, elemento linear bidimensional.....	30
Figura 11 - Elemento linear tridimensional.....	30
Figura 12- Laje Pre-fabricada.....	34
Figura 13 - Laje Maciça.....	35
Figura 14 - Laje Nervurada.....	35
Figura 15 - Laje nervurada.....	36
Figura 16 - Classificação de laje quanto a armação.....	37
Figura 17- Determinação dos vãos da laje.....	38
Figura 18- Laje armada em duas direções.....	38
Figura 19- Convenção de sinais em tipos de lajes.....	39
Figura 20- Tipo de lajes de acordo com seus vínculos.....	39
Figura 21- Caso específico de vinculação.....	40
Figura 22- Critério para considerar bordas engastadas.....	41
Figura 23- Apoios entre lajes e momentos gerados.....	42
Figura 24- Exemplo de compatibilização de momentos fletores positivos e negativos.....	43

Figura 25- Tabela de índice NBR 6118.....	44
Figura 26- Diagrama de momentos fletores com e sem redistribuição.....	46
Figura 27- Domínios de deformação Estado Limite Último (ELU).....	49
Figura 28- Exemplificação de elementos finitos.....	51
Figura 29- Exemplificação de malha de elementos finitos.....	52
Figura 30- Vão efetivo e malha de vigas.....	55
Figura 31 - Cargas acidentais atuantes.....	55
Figura 32 - Momentos fletores resolvidos.....	55
Figura 33- Notação da solução de Czerny.....	65
Figura 34- Laje em uma malha de grelha plana.....	74
Figura 35 -Estrutura a ser dimensionada.....	76
Figura 36 - Determinação dos lados para dimensionamento.....	77
Figura 37 - Conversão de medidas IPEM/SP.....	78
Figura 38 - Engastamento laje L1.....	79
Figura 39 - Engastamento laje l2.....	81
Figura 40 - Engastamento da laje L3.....	83
Figura 41 - Engastamento laje L4.....	85
Figura 42 - Engastamento da laje L5.....	88
Figura 43 - Engastamentos da laje L6.....	90
Figura 44 - Engastamentos da laje L7.....	93
Figura 45 - Engastamentos da laje L8.....	95
Figura 46 - Notação adotada para o dimensionamento.....	97
Figura 47 - Notação de Marcus.....	97
Figura 48 - Momentos dispostos para compatibilização (Marcus).....	97
Figura 49- Momentos dispostos para compatibilização (Czerny).....	98

Figura 50- Momentos dispostos para compatibilização (Bares)	98
Figura 51 - Momentos compatibilizados, (Marcus).	99
Figura 52 - Momentos compatibilizados, (Czerny).	99
Figura 53 - Momentos Compatibilizados, (Bares).	100
Figura 54 – Disposição sem referência global na grelha (esquerda), e com referência global na grelha (direita).	101
Figura 55 - Pórtico 3D gerado.	102
Figura 56 - Grelha do pavimento.	102
Figura 57 - Representação dos momentos Eberick.	103
Figura 58 - Estrutura de outro estudo.	104
Figura 59 - Laje considerada no Estudo 2.	106
Figura 60 - Momentos positivos Estudo 2.	107
Figura 61 - Momentos negativos Estudo 2.	107

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Módulos de elasticidade NBR 6118.....	25
Tabela 2- Coeficientes de ponderação para ELU.	32
Tabela 3 - Valores coeficiente adicional γ_n para pilares e pilares paredes.....	33
Tabela 4 - Critérios de cálculo para bordas mistas.....	40
Tabela 5 - Aplicações quanto aos tipos de análise estrutural.	48
Tabela 6 – Tabela de Coeficientes de Marcus – Lajes do tipo1.....	57
Tabela 7 – Tabela de coeficientes de Marcus – Lajes do tipo 2A e 2B.....	59
Tabela 8 - Tabela de coeficientes de Marcus – Lajes do tipo 3.....	60
Tabela 9 - Tabela de Coeficientes de Marcus - Lajes do tipo 4A e 4B.....	61
Tabela 10 - Tabela de Coeficientes de Marcus - Lajes do tipo 5A e 5B.....	62
Tabela 11 - Tabela de Coeficientes de Marcus - Lajes do tipo 6.	63
Tabela 12 - Tabela de Czerny para Cálculo dos Momentos Máximos - Lajes tipo 1. 2A e 3A.	66
Tabela 13 - Tabela de Czerny para Cálculo dos Momentos Máximos - Lajes tipo 3. 4A e 4B.	67
Tabela 14 - Tabela de Czerny para Cálculo dos Momentos Máximos - Lajes tipo 5A e 5B.	68
Tabela 15 - Tabela de Czerny para Cálculo dos Momentos Máximos - Lajes tipo 6.	69
Tabela 16 - Tabela de coeficientes de Bares corrigidos - lajes do tipo 1, 2A e 2B.....	71
Tabela 17 - Tabela de coeficientes de Bares corrigidos - lajes do tipo 3, 4A e 4B.....	71
Tabela 18 - Tabela de coeficientes de Bares corrigidos - Lajes tipo 5A, 5B e 6.....	73
Tabela 19 - Momentos fletores positivos Estudo 1.	105
Tabela 20 - Diferenças entre momentos fletores positivos Estudo 1.	105
Tabela 21 - : Momentos fletores negativos Estudo 1.	105
Tabela 22 - Diferenças entre momentos fletores negativos Estudo 2.....	106

Tabela 23 - Momentos positivos pelos 4 métodos.	108
Tabela 24 - Percentual de momentos fletores positivos comparados	108
Tabela 25 - Resultados dos momentos fletores negativos.....	109
Tabela 26 - Diferenças percentuais dos momentos negativos.....	109
Tabela 27 - Tabela resumo.	111

LISTA DE EQUAÇÕES

Eq. 1- Relação peso/Massa específica.....	21
Eq. 2 – Determinação de f_{ck}	22
Eq. 3– Módulo de elasticidade inicial (20 a 50 MPa)	24
Eq. 3.1— Módulo de elasticidade inicial (55 a 90 MPa)	24
Eq. 4– Módulo de elasticidade secante.....	25
Eq. 5 - Coeficiente α_i	25
Eq. 6 - Determinação do módulo de elasticidade secante	26
Eq. 7 – Tensão de compressão.....	27
Eq. 8 – Vão efetivo da laje	37
Eq. 9 - Determinação do momento fletor negativo	42
Eq. 10 – Módulo de elasticidade secante.....	45
Eq. 11 – Equação diferencial da quarta ordem de Lagrange.....	52
Eq. 12 – Coeficiente K da equação de lagrange.....	53
Eq. 13 – Momento fletor direção X por unidade de largura	53
Eq. 14 – Momento fletor direção Y por unidade de largura	53
Eq. 15 – Força cortante na direção X por unidade de largura.....	53
Eq. 16 – Força cortante na direção Y por unidade de largura.....	53
Eq. 17 - Momento de torção	53
Eq. 18 – Momentos definidos no processo de Marcus.....	56
Eq. 19 – Coeficiente C_x	56
Eq. 20 - Coeficiente C_y	56
Eq. 21 – Relação entre vãos da laje (λ)	56
Eq. 22 – Cálculo de Momentos com aplicação dos coeficientes m_x e m_y	56
Eq. 23 – Cálculo de Momentos com aplicação dos coeficientes n_x e n_y	57

Eq. 24 - Cálculo de Momentos com aplicação dos coeficientes α_x em Czerny	65
Eq. 25 - Cálculo de Momentos com aplicação dos coeficientes α_y em Czerny	65
Eq. 26- Cálculo de Momentos com aplicação dos coeficientes β_x em Czerny	65
Eq. 27- Cálculo de Momentos com aplicação dos coeficientes β_y em Czerny	65
Eq. 28 - Cálculo de Momentos com aplicação dos coeficientes μ_x e μ_y em Bares.....	70
Eq. 29 - Cálculo de Momentos com aplicação dos coeficientes μ'_x e μ'_y em Bares.....	70
Eq. 30 – Rigidez a torção da grelha (1)	75
Eq. 31 – Rigidez a torção da grelha (2)	75
Eq. 32 – Rigidez a torção da grelha (3)	75
Eq. 33 – Rigidez a torção da grelha (4)	75
Eq. 34 – Peso próprio da laje.....	78
Eq. 35 – Total de cargas permanentes	78

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	REVISÃO IBLIOGRÁFICA.....	20
2.1	O MATERIAL CONCRETO.....	20
2.1.1	Propriedades.	21
2.1.1.1	Peso/massa Específica.	21
2.1.1.2	Classes de resistência do concreto.....	21
2.1.1.3	Tração.	23
2.1.1.4	Módulo de elasticidade.....	24
2.1.1.5	Coefficiente de Poisson.	26
2.1.1.6	Diagrama de tensão deformação idealizado.	26
2.2	A ESTRUTURA.....	27
2.2.1	Concreto Armado.	27
2.2.2	Premissas da análise estrutural.	28
2.2.3	Ações nas estruturas.	31
2.2.4	Estados limites.....	31
2.3	LAJES.....	33
2.3.1	Tipos de lajes.....	33
2.3.1.1	Quanto a composição e forma.	34
2.3.1.2	Quanto à armação.	36
2.3.1.3	Quanto aos tipos de apoios.	38
2.3.1.4	Compatibilização de momentos nas bordas.....	41
2.3.1.5	Espessura/ Cobrimentos Mínimos.....	43
2.4	ANÁLISE ESTRUTURAL.....	44
2.4.1	Análise Linear.	45
2.4.2	Análise Linear com redistribuição.....	45
2.4.3	Análise Plástica.	46
2.4.4	Análise não linear.	47
2.4.5	Análise através de modelos físicos.....	47
2.4.6	Dimensionamento de lajes.....	48

2.5	MÉTODOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL.....	50
2.6	A TEORIA DA ELASTICIDADE.	52
2.6.1	Solução por meio de séries.	53
2.6.2	Teoria de Marcus.	54
2.6.3	Teoria de Czerny.	64
2.6.4	Método de Bares.	69
2.6.5	Método da Analogia de Grelha.	74
3	METODOLOGIA.....	75
3.1	OBJETO DE ESTUDO.....	76
4	DIMENSIONAMENTO.....	77
4.1	DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS.....	77
4.1.1	Cálculo simplificado.	79
4.1.2	Compatibilização de momentos.	96
4.1.3	Dimensionamento no Eberick.	100
5	OUTROS ESTUDOS.....	103
5.1	ESTUDO 1.....	104
5.2	ESTUDO 2.....	106
6	ANÁLISE COMPARATIVA E CONCLUSÕES.	107
6.1	ESTE ESTUDO.	108
6.1.1	Primeiras Conclusões.	110
6.2	COMPARATIVO A OUTROS ESTUDOS.....	110
6.2.1	Conclusões finais.	111
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	114

1 INTRODUÇÃO

Com a evolução tecnológica e as novas ferramentas de auxílio para o cálculo de estruturas os engenheiros atuais já não utilizam métodos mais simplificados para o dimensionamento das mesmas. Um engenheiro deve ter como base a solução de problemas e renovação de métodos construtivos, saber quando um software é recomendável ou ter ao menos os conhecimentos dos métodos mais simplificados, como exemplo o de Marcus, de Czerny, de Bares, etc. para o dimensionamento de lajes. Durante a execução de uma obra diversas vezes surgem desafios de interpretação dos dados de projeto e até a necessidade de soluções mais rápidas para uma estrutura, ficando assim inviável a execução de um estudo mais elaborado mediante a solução de ferramentas que exigem mais tempo para apresentar resultados, portanto, é imprescindível o estudo, a comparação, a discussão dos pontos fortes e fracos dos métodos de cálculo como auxílio aos engenheiros estruturais. Os métodos de análise e dimensionamento de lajes de concreto armado de pavimentos de edifícios são usados para analisar os deslocamentos, os esforços internos, e a capacidade de carga das lajes, assim, conhecendo-se a distribuição dos esforços atuantes, tais como momentos fletores, e esforços cortantes, é possível verificar as tensões nestas lajes. Há diversos métodos de cálculo para a obtenção dos valores dos momentos fletores máximos para lajes de concreto armado, podendo estes métodos apresentarem diferenças no resultado para momentos finais de dimensionamento, para tal, este trabalho simplifica o entendimento de tais métodos. Considerando que os valores dos momentos fletores para estas lajes calculados, compatibilizados e corrigidos, seguindo as referências encontradas da bibliografia de cada método, há a possibilidade de verificar as divergências de cada método tal qual podem ser significativas na formulação do projeto de estruturas.

No capítulo 1, foi feito o levantamento de todo o referencial teórico desta pesquisa. Apresentou-se as definições de concreto, classificação do mesmo, tipos de propriedades. Ainda nesse capítulo descreve-se toda as premissas necessárias ao cálculo estrutural bem como a definição e descrição dos métodos de cálculo simplificados a serem usados para o dimensionamento do objeto da pesquisa. No capítulo 2-Objeto de estudo e 3-Dimensionamento, fez-se a apresentação do objeto pesquisado onde foram calculados os esforços em cada laje, sendo apresentado para cada dimensionamento um croqui descritivo dos resultados gerados com a localização dos valores obtidos nos cálculos. No capítulo 4-Outros estudos apresentou-se os resultados obtidos em outros estudos do mesmo gênero, sendo a correlação destes estudos e o objeto de pesquisa discutidos no capítulo 5-Análise comparativa e conclusões.

As considerações desenvolvidas neste estudo apresentaram um comparativo de momentos fletores obtidos pela teoria de Marcus, Czerny, Bares e pela analogia de grelha, esta última através de software, o qual foi utilizado o Alto Qi Eberick V8. Enfim as discussões percorrem em duas linhas de pensamento, sendo uma as correlações aplicadas ao objeto de estudo, por método de cálculo, e outra as correlações aplicadas junto ao objeto de estudo e outros estudos do mesmo gênero.

A formulação do texto desta pesquisa visou apresentar de forma simples e objetiva todas as propriedades consideradas no cálculo estrutural visando através da facilidade da leitura uma melhor compreensão dos conceitos de dimensionamento de estruturas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica visa apresentar todos os fatores que levam ao entendimento das premissas do cálculo estrutural, bem como a apresentação dos elementos envolvidos nesta pesquisa.

2.1 O MATERIAL CONCRETO

O concreto como material mais frequente na construção civil possui a capacidade de resistir a grandes pressões de compressão, por outro lado, segundo Bastos 2006, p.7, os esforços de tração e flexão não possuem o mesmo desempenho, sendo este próximo de 10% se comparado à compressão.

Carvalho Figueiredo (2001, p.24) define a composição do concreto da associação de argamassa, (Pasta + agregado miúdo) e agregado graúdo. A argamassa por sua vez se origina das composições da Pasta, (Cimento + Água). O concreto armado é a junção do composto de concreto e aço, este, resiste melhor às pressões que o concreto comum. A preparação do concreto segundo Massaro (1979) é resultante do endurecimento de uma massa obtida pelo intermédio do amassamento de uma mistura de aglomerante, água e agregados. Com consistência inicial plástico-viscosa, o concreto possui uma trabalhabilidade necessária para que o mesmo possa ser moldado em fôrmas.

Como aglomerante usa-se geralmente o cimento portland, que quando em contato com a água reage quimicamente e endurece com o tempo. O aglomerante desempenha a função de unir os fragmentos de outros materiais.

Os agregados são utilizados para aumentar o volume da mistura e o rendimento da mesma, reduzindo seu custo. Dividem-se basicamente em dois grupos:

- **Agregados miúdos:** com diâmetro (\emptyset) entre 0,075mm e 4,8mm. Ex.: Areia.
- **Agregados graúdos:** com $\emptyset \geq 4,8$ mm. Ex.: Pedra.

2.1.1 Propriedades

As propriedades do concreto podem ser subdivididas em duas fases. Sendo a primeira, a fase de preparo da mistura, até o acabamento, e a segunda, a fase do concreto já endurecido e em serviço. Esta segunda fase compreende fatores como a Resistência do concreto à compressão e à tração, módulo de elasticidade, fluência e retração, peso e massa específica, que, dentre outras, são comumente empregadas na fase de cálculo dos elementos estruturais.

2.1.1.1 Peso/massa Específica

A relação de densidade do material para o concreto deve ser reconhecida como peso específico do material. O peso específico é a maior parcela de aplicação de força por unidade, esta última tomada como m^3 (nas definições de cálculo do concreto).

O peso específico do concreto varia conforme seus materiais constituintes e suas próprias propriedades, também com as condições da mistura e adensamento, uma vez que diferentes materiais igualmente proporcionais em suas dimensões podem possuir massas diferentes influenciando assim o peso específico como exemplificam as equações:

$$\gamma = \frac{P}{V} \text{ ou } P = \gamma V \text{ ou } V = \frac{P}{\gamma}$$

Eq. 1

Sendo

γ = Peso específico;

P = Massa e;

V = Volume.

A NBR 6118/2014, item 8.2.2, especifica para adoção de cálculos de estrutura $2400\text{kg}/m^3$ e $2500\text{kg}/m^3$ para massa específica nos casos de concreto simples, e armado consecutivamente, salvo em casos que já se tenha os dados da massa específica.

2.1.1.2 Classes de resistência do concreto

A propriedade do concreto mais significativa é a resistência a compressão (f_c), estando dentre outras a resistência à tração e módulo de elasticidade. A resistência à compressão é

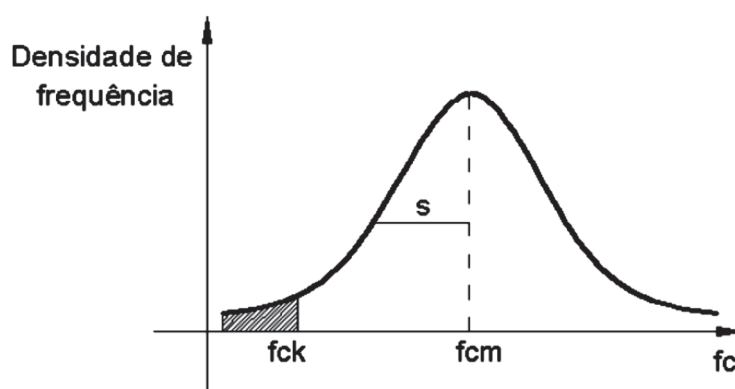
determinada a partir de ensaios de corpos de prova delimitados por normas específicas (no Brasil NBR 5738 e 5739 com corpos de prova cilíndricos padronizados. A repetição destes ensaios determina um fator comum entre o número de ensaios e valores obtidos na ruptura dos corpos cilíndrico formando assim o gráfico de distribuição normal, também denominado de Curva Estatística de Gauss onde se observa através do gráfico a resistência média (f_{cm}) e resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}).

Sendo f_{cm} a resistência média observada nos ensaios de ruptura do concreto o valor de f_{ck} pode ser definido solução da equação:

$$f_{ck} = f_{cm} - 1,65s$$

Eq. 2

Figura 1- Curva estatística de Gauss.



Fonte: Fundamentos do concreto e projeto de edifícios - Libânio M. Pinheiro/2007, p.12.

O desvio padrão representado pela letra “s” corresponde à distância entre a abscissa de f_{cm} e a do ponto de inflexão da curva (ponto em que ela muda de concavidade). O valor de 1,65 foi constatado uma vez que observou-se que em 5% dos casos o corpo de prova possui f_c menor que f_{ck} , ou seja, em apenas 5% dos casos o valor de f_{ck} poderá não ser atingido nestes ensaios.

Finalmente a NBR 8953/2015 define as classes de concreto para fins estruturais com base em sua resistência à compressão (f_{ck}), separando-os em classe I e II, compreendendo na Classe I, os concretos com resistência de 20, 25, 30, 35, 40, 45 e 50 Mpa (Megapascal) e na Classe II, os concretos de resistência de 55, 60, 70, 80, 90 e 100 Mpa nomeados com a letra “C” antes do numeral (Ex: C20, C30 e etc), indicando a palavra **Concreto** e o numeral indicando sua resistência à compressão.

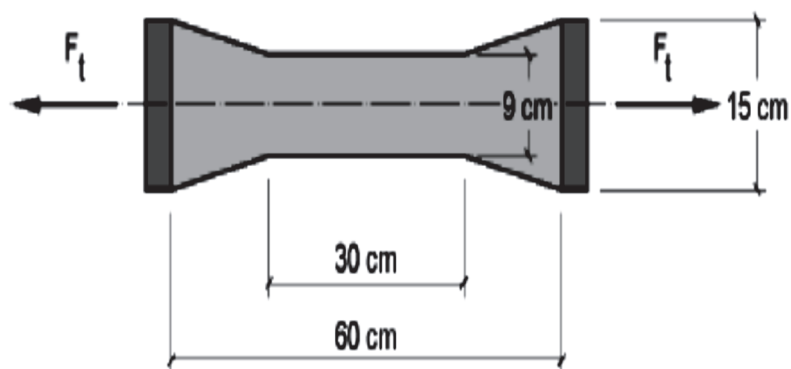
A NBR 6118/2014 especifica que para a análise de cálculo de estruturas no ELU (sendo esse o último estado de tensão de compressão da peça, o que precede a fissuração ou rompimento), para concretos de resistência à compressão de classes menores que C50, deve-se

adotar um fator de $0,85f_{ck}$, ou seja possui para cálculo uma limitação de aplicação de força igual a 15% menor que o valor de f_{ck} .

2.1.1.3 Tração

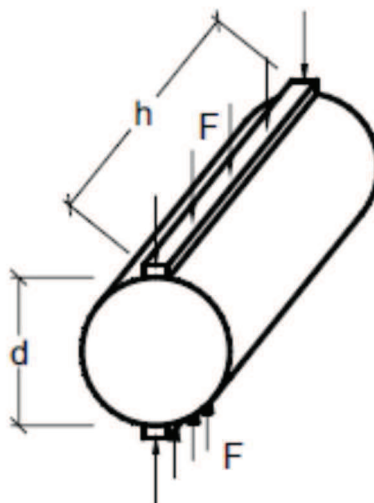
O fenômeno da tração caracteriza-se pela tendência de alongamento do elemento na direção da força atuante, assim, produz o efeito inverso da compressão. Os ensaios capazes de determinar a força que o concreto é tracionado são realizados de três formas diferentes, sendo elas, Tração Axial, Ensaio de Compressão Diametral e Ensaio de Flexão de Vigas, conforme exemplificam as figuras abaixo:

Figura 2- Ensaio de tração direta.



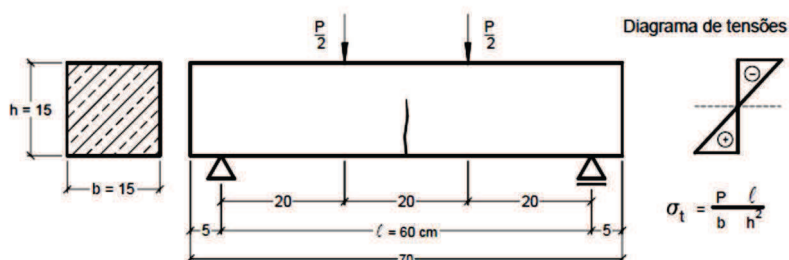
Fonte: Fundamentos do concreto e projetos de edifícios – Libânio M. Pinheiro/2007, p.13.

Figura 3- Ensaio de compressão diametral.



Fonte: Estruturas em Concreto I, Bastos 2006, p.65.

Figura 4- Ensaio de flexão de vigas.



Fonte: Estruturas em Concreto I, Bastos 2006, p.65.

Onde:

$P/2$ e F_t são as forças aplicadas a peça de concreto simples sem armadura, (figuras 2 e 4);

d e h são o diâmetro e comprimento do cilindro, respectivamente, (figura 3);

a é a media correspondente a 1/3 do comprimento total da viga, (figura 4).

A resistência à tração para fins de cálculo e análise estrutural possuem as seguintes definições na NBR 6118/2014:

A resistência à tração indireta $f_{ct,sp}$ e a resistência à tração na flexão $f_{ct,f}$ devem ser obtidas em ensaios realizados segundo as ABNT NBR 7222 e ABNT NBR 12142, respectivamente. A resistência à tração direta f_{ct} pode ser considerada igual a $0,9f_{ct,sp}$ ou $0,7f_{ct,f}$, ou, na falta de ensaios para obtenção de $f_{ct,sp}$ e $f_{ct,f}$, pode ser avaliado o seu valor médio ou característico por meio das seguintes equações:

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ct,m}$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 f_{ct,m} \text{ — para concretos de classes até C50:}$$

$$f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3} \text{ — para concretos de classes C55 até C90:}$$

$$f_{ct,m} = 2,12 \ln(1 + 0,11 f_{ck})$$

Onde:

$f_{ct,m}$ e f_{ck} são expressos em megapascal (MPa).

Sendo

$f_{ckj} \geq 7$ MPa, estas expressões podem também ser usadas para idades diferentes de 28 dias. (NBR 6118/, 2014, p. 23).

2.1.1.4 Módulo de elasticidade

A ABNT NBR 8522 define os métodos de ensaio para a obtenção do módulo de elasticidade (E_{ci}), sendo considerado o módulo de deformação tangente inicial, obtido aos 28 dias de idade, ainda, a NBR 6118/2014, para o caso de não serem realizados ensaios pode-se usar expressões que determinam o módulo de elasticidade sendo:

$$E_{ci} = \alpha E \cdot \sqrt{5600 f_{ck}} \rightarrow \text{para } f_{ck} \text{ de } 20 \text{ MPa a } 50 \text{ MPa;}$$

Eq. 3

Eq. 3.1

$$E_{ci} = 21,5 \cdot 10^3 \cdot \alpha E \cdot 5600 \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25 \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \text{para } f_{ck} \text{ de } 55 \text{ MPa a } 90 \text{ MPa};$$

Onde αE , é o parâmetro em função da natureza do agregado que influencia o módulo de elasticidade, sua determinação é preestabelecida por ensaios específicos, e constitui os seguintes valores.

$$\alpha E = 1,2 \text{ para basalto e diabásio};$$

$$\alpha E = 1,0 \text{ para granito e gnaisse};$$

$$\alpha E = 0,9 \text{ para calcário};$$

$$\alpha E = 0,7 \text{ para arenito.}$$

O módulo de deformação secante pode ser obtido segundo método de ensaio estabelecido na ABNT NBR 8522, ou estimado pela expressão.¹

Eq. 4

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci}$$

Sendo;

Eq. 5

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \times \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0$$

Sobre os módulos de elasticidade a tabela 8.1 da NBR 6118 estabelece valores estimados em função da característica à compressão do concreto.

Tabela 1- Módulos de elasticidade NBR 6118.

Classe de resistência	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C60	C70	C80	C90
E_{ci} (Gpa)	25	28	31	33	35	38	40	42	43	45	47
E_{cs} (Gpa)	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	47
α_i	0,95	0,86	0,88	0,89	0,90	0,91	0,93	0,95	0,98	1,00	1,00

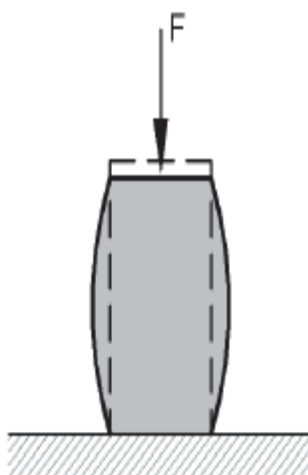
Fonte: ABNT/NBR 6118/2014.

¹ ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS DE NORMAS TÉCNICAS, Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento, NBR 6118, ABNT, Rio de Janeiro, p86, 2014.

2.1.1.5 Coeficiente de Poisson

A aplicação de uma força sobre uma peça de concreto é capaz de deformá-la na direção da carga e simultaneamente na direção transversal a esta força. A relação entre a deformação transversal e a longitudinal é denominada coeficiente de Poisson e indicada pela letra ν , (Alfabeto grego). Para tensões de compressão menores que $0,5 f_c$ e de tração menores que f_{ct} , pode ser adotado $\nu = 0,2$.

Figura 5- Deformação transversal e longitudinal do concreto.



Fonte: Libânio M. Pinheiro, Fundamentos do concreto e projetos de edifícios/2007. p34.

2.1.1.6 Diagrama de tensão deformação idealizado

Para o dimensionamento de seções transversais de peças de concreto armado no estado limite último, a NBR 6118 (item 8.2.10.1), especifica que para tensões de compressão menores que $0,5 f_c$, pode-se admitir uma relação linear entre tensões e deformações, adotando-se para módulo de elasticidade o valor secante dado pela equação:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci}$$

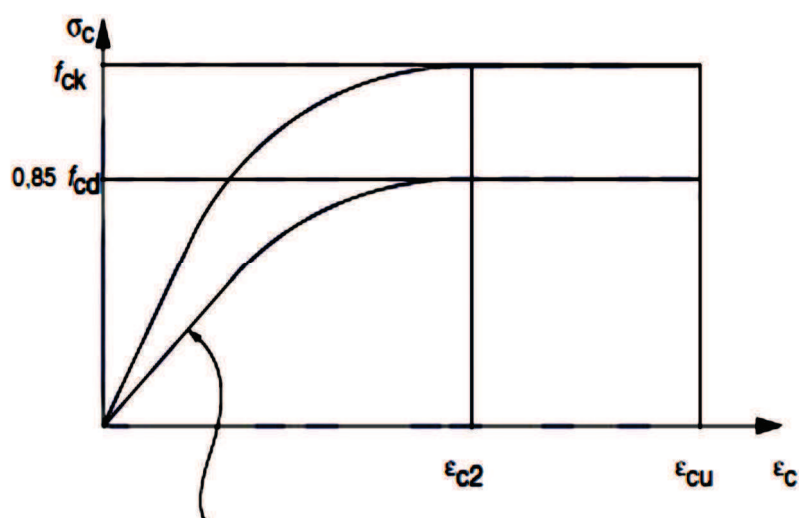
Eq. 6

Desta forma o concreto de classe $f_{ck} < 50\text{Mpa}$ sofre um encurtamento sob tensões de compressão. Para a deformação de encurtamento de até 2 ‰ (2 mm/m) a lei de variação é de acordo com a parábola do 2º grau dada na equação:

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{0,002} \right)^2 \right]$$

Após 2 ‰ o concreto sofre um encurtamento plástico até o valor máximo de 3,5 ‰, ou seja, considera-se que o máximo encurtamento que o concreto possa sofrer seja de 3,5 ‰, ou 3,5 mm em cada metro de extensão. A tensão máxima de compressão no concreto é limitada por um fator 0,85, isto é, no cálculo das peças não se considera a máxima resistência dada por f_{ck} , e sim um valor reduzido em 15 %.

Figura 6- Diagrama de tensão/deformação.



Fonte: ABNT NBR 6118/201, p26.

2.2 A ESTRUTURA

Um projeto de estruturas visa apresentar as soluções técnicas para a estabilidade e uso adequado da construção. No entanto o entendimento dos elementos de análise e suas propriedades são necessários ao dimensionamento preciso da mesma.

2.2.1 Concreto Armado

O concreto armado, conforme especificado no item 1.1, é a junção do concreto comum e aço. A origem desta tecnologia em concreto data-se por volta de 1850 a partir da observação

da baixa resistência a tração da pedra presente no concreto aliando-se assim a boa resistência à tração do aço, para mais o concreto presente deve possuir aderência entre si e a armadura de aço sendo que haja real solidariedade entre ambos, e que o trabalho seja realizado de forma conjunta. Tal característica é devida graças ao módulo de deformação destes dois materiais, que são próximos.

2.2.2 Premissas da análise estrutural

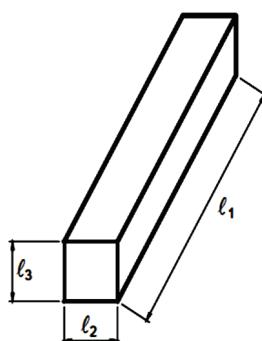
No concreto armado classificam-se os elementos estruturais conforme a sua geometria. A resposta destes elementos a solicitações pode ser representada conforme o tipo de elemento estrutural, os quais estão especificados na NBR 6118/2014 nos itens 14.4.1 a 14.4.2.

As armaduras devem sempre respeitar as quantidades necessárias, mínimas e máximas exigidas por esta Norma segundo a teoria de concreto estrutural, bem como os critérios de detalhamento prescritos por ela.²

A classificação segundo a geometria dos elementos estruturais é feita comparando as dimensões de altura, comprimento e espessura da peça, são eles:

- I. **Elementos Lineares:** São elementos cujo a dimensão longitudinal supera em pelo menos três vezes a seção transversal. Estes por sua vez são subdivididos em:
 - **Viga:** Normalmente disposta horizontalmente onde a flexão é preponderante.

Figura 7– Elemento Linear- Viga.



Fonte: BASTOS/2006, p. 64.

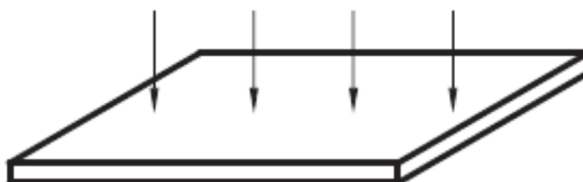
² ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS DE NORMAS TÉCNICAS, Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento, NBR 6118, ABNT, Rio de Janeiro, p86, 2014.

- **Pilares:** Disposta na vertical, de eixo reto, reage a compressão que é preponderante.
- **Tirante:** Elemento linear onde as forças de tração são preponderantes.
- **Arcos:** Elemento curvo onde as forças de compressão são preponderantes podendo agirem simultaneamente às forças de flexão.

II. Elementos Bidimensionais: São classificados elementos bidimensionais aqueles em que a relação da largura e comprimento possuem dimensões próximas e superam significativamente a dimensão da seção transversal. Como exemplos, encontram-se:

- **Elementos de superfície:** Do tipo Placas, Chapas, Cascas, Pilar-parede, estes elementos possuem a dimensão da espessura significativamente pequena face às demais dimensões.
- **Placas:** Possuem superfícies planas, e estão sujeitas na maior parte à solicitações normais. São denominadas lajes se possuem vão maior que três vezes a seção transversal, caso contrário são denominadas Placas espessas.

Figura 8 - Esquema de carregamento em placas, elemento linear bidimensional.



Fonte: BASTOS/2006, p. 64.

- **Cascas:** Elementos de superfície acidentada (não plana).

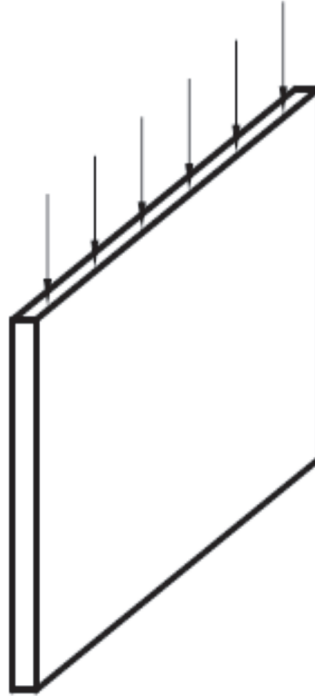
Figura 9 - Elemento Linear Casca.



Fonte: BASTOS/2006, p. 64.

- **Chapas:** Peças sujeita principalmente a ações contidas em seu plano transversal.

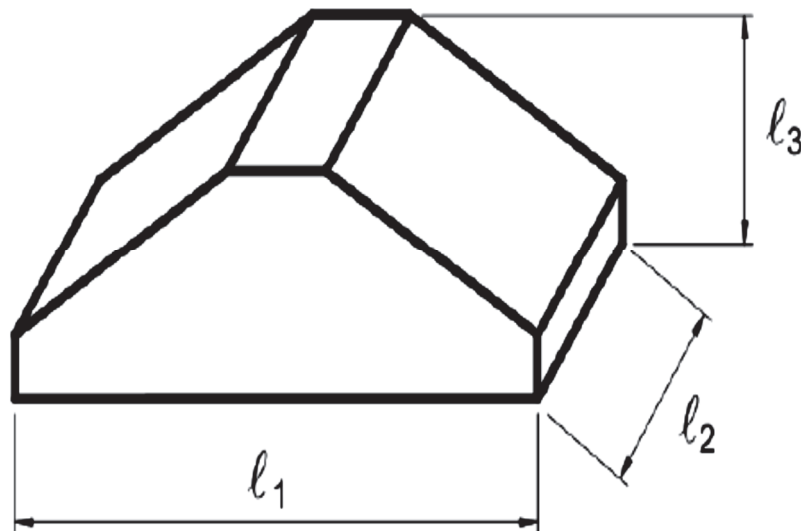
Figura 10– Esquema de carregamento nas Chapas, elemento linear bidimensional.



Fonte: BASTOS/2006, p. 64.

- III. Elementos Tridimensionais:** São elementos em que as três dimensões (altura, comprimento e espessura), são próximas, são exemplos deste elemento os blocos e sapatas de uma edificação.

Figura 11 - Elemento linear tridimensional.



Fonte: BASTOS/2006, p. 64.

2.2.3 Ações nas estruturas

Toda estrutura em concreto está sujeita a ações que comprometem a estabilidade, tais ações são classificadas na NBR 6118/2014 em ações permanentes, variáveis e excepcionais e estão definidas segundo a NBR 8681/2003. Segundo a mesma NBR as ações permanentes são aplicações de força de modo constante ou com pouca variação, e podem ser exemplificadas pelo peso próprio em um edifício. Ações variáveis seriam as que apresentam carga variante de suas médias, durante o tempo de vida de uma construção, como as cargas de vento; E ações excepcionais, caracterizam-se pelas maiores aplicações de cargas, porém em espaço ínfimo de aplicação. Na engenharia, esta última caracteriza-se comumente por fenômenos naturais, como terremotos e tempestades. Cargas acidentais; são as ações variáveis que atuam nas construções em função de seu uso. Tais ações devem ser consideradas no dimensionamento de estruturas para a prevenção do deslocamento máximo estrutural ou deslocamento limite. Ainda a NBR 6118/2014 define no Item 13.3 deslocamentos limites como sendo valores para a verificação de deformações excessivas da estrutura conforme o grau de aceitabilidade sensorial, efeitos específicos, e efeitos em elementos estruturais e não estruturais.

2.2.4 Estados limites

Uma estrutura atinge o seu estado limite quando sob ação de forças de ruptura torna-se inutilizável deixando de atender as soluções previstas em projeto para utilização, estes requisitos são as condições de funcionalidade, durabilidade e segurança da mesma. Assim define-se em dois tipos, sendo eles:

- Estados limites últimos (de ruína), ELU.
- Estados limites de utilização (de serviço). ELS.

O conceito de segurança de uma estrutura é a capacidade que ela apresenta de suportar, sem atingir um estado limite, as ações mais desfavoráveis ao longo da vida útil da obra em condições adequadas de funcionalidade.

Ao atingir o estado limite último (ELU) uma estrutura torna-se insegura uma vez que esgota se sua capacidade de sustentação podendo ocorrer, colapso, ruptura de seções, instabilidade, e deterioração da mesma. Usualmente as estruturas são projetadas com uma

margem de segurança, isto é, uma folga de resistência relativamente aos carregamentos aplicados na estrutura, logo, para ocorrer a ruptura a estrutura teria que estar submetida a carregamentos bem superiores para os quais foi projetada. A margem de segurança no dimensionamento dos elementos estruturais ocorre com a introdução dos coeficientes numéricos de ponderação), prevenindo-se assim que a estrutura atinja seu estado de ruína. A aplicação destes coeficientes produz o efeito de serem majoradas as ações e esforços na estrutura e minoram o valor das resistências do concreto armado.

Tabela 2- Coeficientes de ponderação para ELU.

Combinações	Concreto γ_c	Aço γ_s
Normais	1,4	1,15
Especiais ou de construção	1,2	1,15
Excepcionais	1,2	1,0

Fonte: ABNT NBR 6118/2014, p 71.

Os estados limites de serviço (ELS), são aqueles correlacionados à aparência, durabilidade e conforto de uma estrutura, seja em relação aos usuários, seja em relação às máquinas e aos equipamentos utilizados, assim mesmo que uma estrutura atinja seu estado limite de utilização (ELU), ela encontra-se inadequada a utilização, por não oferecer mais as condições específicas de serviço a que foi projetada. Estes são definidos segundo a NBR 6118 em:

- **Estado limite de formação de fissuras (ELS-F):** Inicia-se quando a tensão de tração máxima na seção transversal for igual a resistência do concreto à tração na flexão ($f_{ct,f}$); Onde aparecem as primeiras fissuras.
- **Estado limite de abertura das fissuras (ELS-W):** Classifica a distância máxima permitida para abertura de fissura conforme especificado no item 13.2.3 da NBR 6118 (ver figura 13).
- **Estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF):** Os elementos estruturais como vigas e lajes trabalham fletidos, ou seja em serviço, o ELS-DEF é alcançado conforme as ações atinjam os limites majorados em cálculo de projeto.
- **Estado limite de vibrações excessivas (ELS-VE):** Estado em que as vibrações estipuladas para uma estrutura são ultrapassadas.

Os limites estabelecidos para ELS segundo a NBR 6118, não necessitam de minoração.

Tabela 3 - Valores coeficiente adicional γ_n para pilares e pilares paredes.

b (cm)	≥ 19	18	17	16	15	14
γ_n	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
Onde: $\gamma_n = 1,95 - 0,05b$ b = menor dimensão da seção transversal.						

Fonte: NBR 6118/2014, p.73.

2.3 LAJES

As lajes são definidas como elementos em que a largura é superior a 1/3 da espessura, e recebem a maior parte dos carregamentos aplicados em uma edificação normalmente distribuídas no plano superior. A NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.75) define placas como “Elementos de superfície plana sujeitos principalmente a ações normais ao seu plano. As placas de concreto são usualmente denominadas lajes.” As ações principais a serem consideradas para as lajes são ações de carga permanente (p) e de carga acidental (q) segundo a NBR 6118/2014. O método para o cálculo de esforços nas lajes baseia-se na Teoria De Plasticidade (em ruptura), e os Métodos Clássicos fundados a partir da teoria da elasticidade. Ainda a análise estrutural das lajes pode ser efetuada considerando a Análise Linear, Análise Linear com Redistribuição, Análise Plástica, Análise não Linear, ou através de modelos físicos, segundo a NBR 6118/2014.

2.3.1 Tipos de lajes

As lajes, na maioria das vezes, destinam-se a receber as cargas verticais que atuam nas estruturas de um modo geral, transmitindo-as para os respectivos apoios, que comumente são vigas localizadas em seus bordos, podendo ocorrer também a presença de apoios pontuais

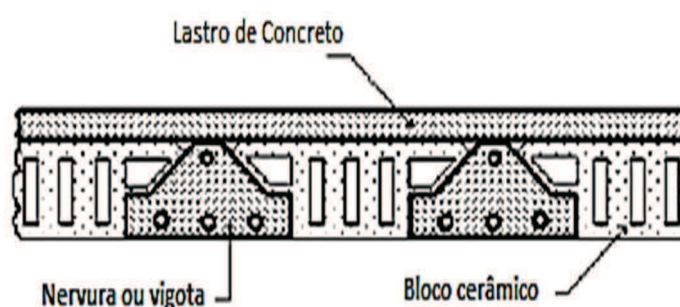
(pilares). Existem diferentes tipos de lajes sendo eles, quanto a sua composição e forma, tipo de apoio e metodologia de cálculo.

2.3.1.1 Quanto a composição e forma

Neste aspecto as lajes podem ser definidas como:

Lajes pré-fabricada: São constituídas por vigas ou vigotas concreto armado, montadas de modo intercalado com bloco de cerâmica (lajotas) ou EPS, (isopor). A camada de concreto lançada sobre as peças denomina-se capa. Estas lajes vencem vãos de até 5m entre os apoios. Outro tipo de vigota, conhecido como vigota treliçada, utilizam vergalhões soldados entre si formando uma treliça. As estruturas planas (placas) foram desenvolvidas com a combinação do concreto e aço, proporcionando assim a capacidade de transpor vãos e suportar carregamentos com segurança. Esta combinação inicialmente foi proposta pelo Eng. Frances Joseph Loius Lambot em 1845, denominada de “cimento armado”. Segundo BASTOS (2005, p.46), laje pré-fabricada é a laje que tem suas partes constituintes fabricadas em escala industrial no canteiro de uma fábrica. Podem ser unidirecionais, bidirecionais, pré-laje ou alveolar protendida.

Figura 12– Laje Pre-fabricada.



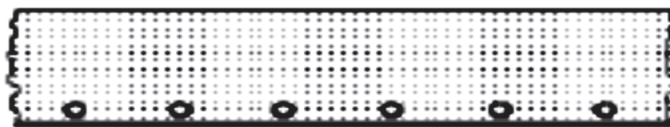
Fonte: Estudo das Lajes - J.M. Filho/Unespe 2004, p64.

Lajes maciças: São lajes de seção homogênea. Os escoramentos e formas mantêm as características de sustentação e moldagem até que adquiram resistência própria.

Toda a espessura do elemento é composta por concreto, contendo armaduras longitudinais e ocasionalmente armaduras transversais. Podem ainda ser de concreto protendido ou de concreto armado e, geralmente possuem espessuras que varia de 7

em a 15 cm sendo projetadas para os mais diversos tipos de construção. (BASTOS, 2005).

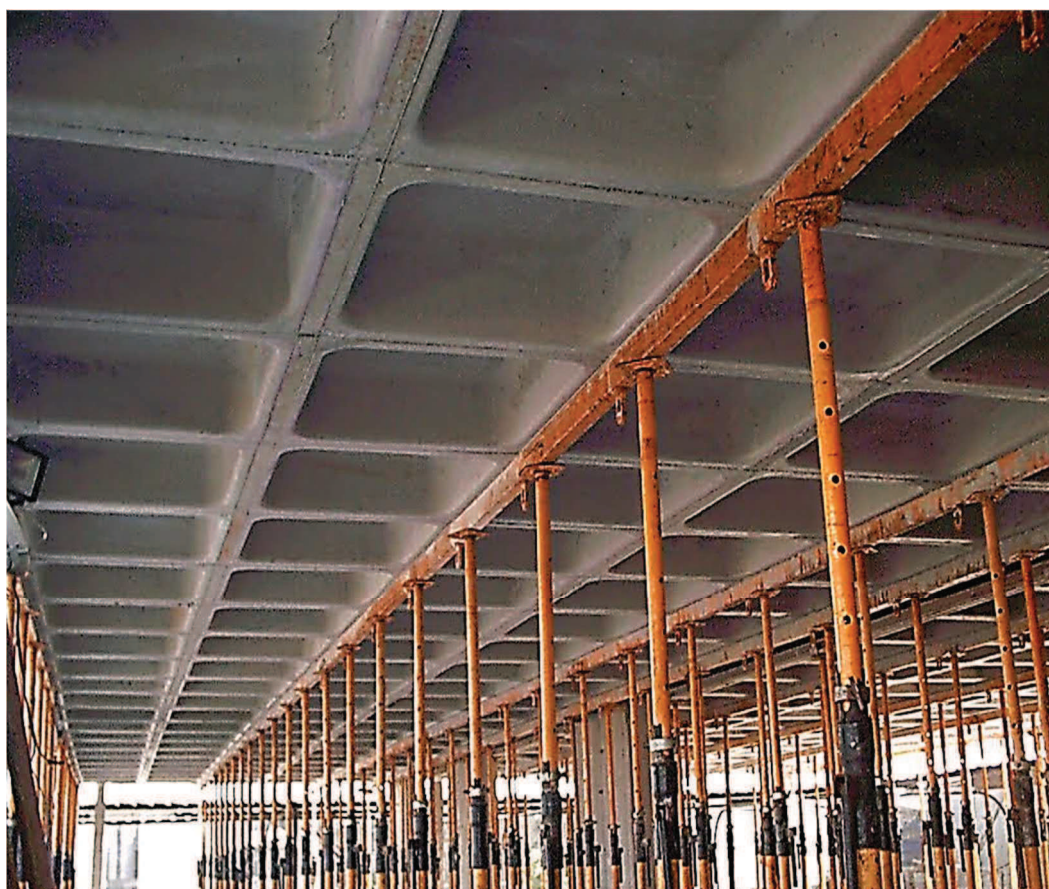
Figura 13 - Laje Maciça.



Fonte: Estudo das Lajes - J.M. Filho/Unespe 2004, p64.

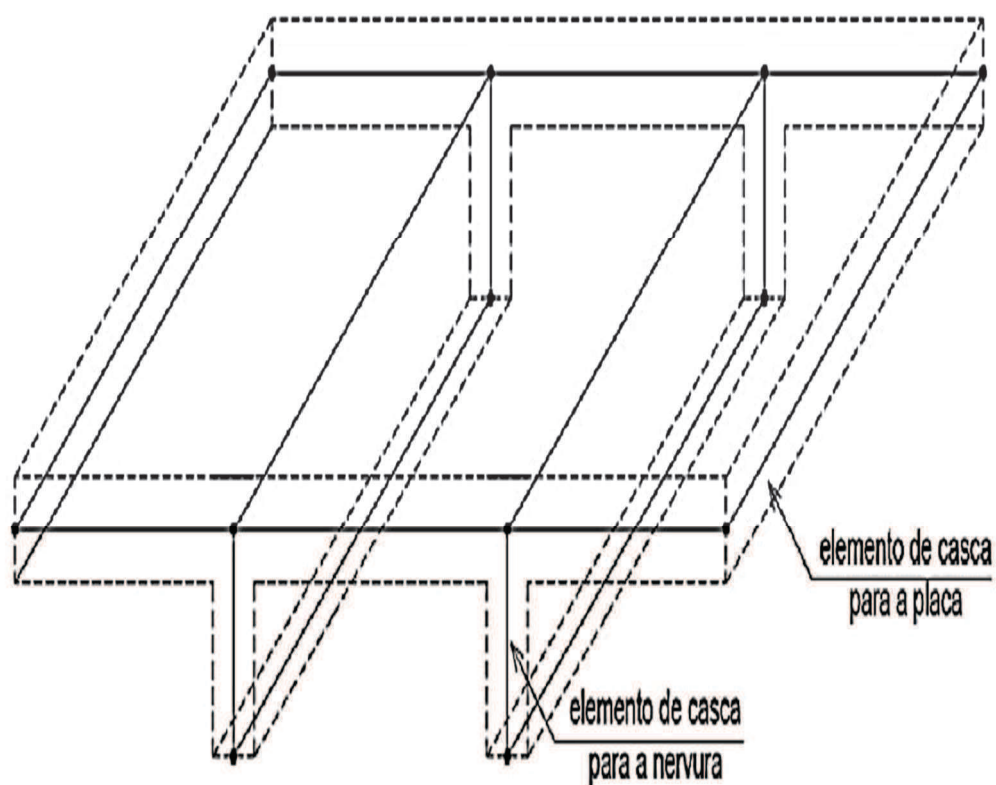
Lajes nervuradas: São as lajes (figura 14), em que a zona de tração é constituída por nervuras, onde são concentradas as armaduras de tração. Entre estas nervuras pode ser colocado material inerte, sem função estrutural. (CUNHA & SOUZA, 1998, p. 23).

Figura 14 - Laje Nervurada.³



³ Fonte: Atex Brasil. Disponível em:

<<http://www.atex.com.br/img/conteudo/Laje%20Nervurada/Protendida/25.jpg>> Acesso em 07 de junho de 2016, 12hs.

Figura 15 - Laje nervurada.⁴

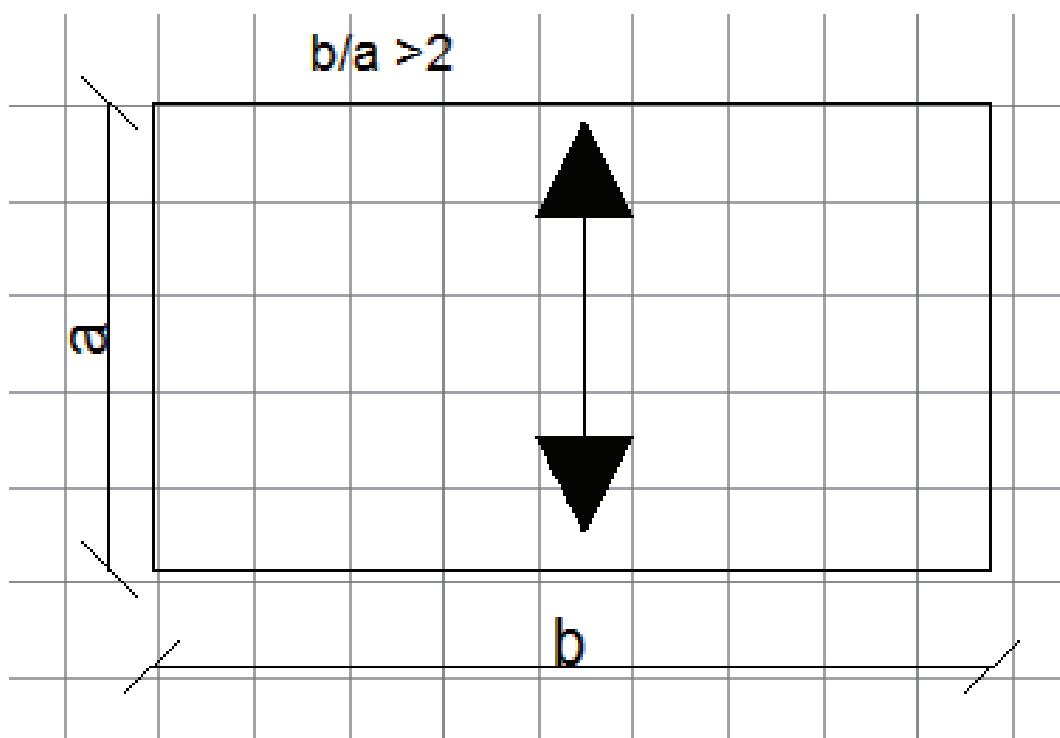
2.3.1.2 Quanto à armação

As lajes podem ser classificadas quanto a sua armação, podendo ser lajes armadas em uma ou em duas direções. As lajes armadas em uma direção são aquelas em que os momentos fletores gerados atuam em direção única, sacadas por exemplo, as quais possuem somente um lado apoiado. Lajes apoiadas em dois lados opostos, (rampas, escadas), e lajes com apoio simples ou engaste que geometricamente o maior lado (b), possua o dobro de tamanho do lado menor (a).

Os momentos na direção do menor vão é muito superior ao da outra direção quando a relação entre os vãos supera 2, sendo, dessa forma, considerada como armada em apenas uma direção. Na direção secundária, paralela a “L”, é colocada uma armação de distribuição, (Carneiro, 2006, p.20).

⁴ Rev. IBRACON Estrut. Mater. vol.8 no.2 São Paulo Mar./Apr. 2015. **Análise numérica de flexão em lajes nervuradas com a consideração dos efeitos de fissuração no concreto.** Disponível em: <<http://www.scielo.br/img/revistas/riem/v8n2//1983-4195-riem-08-02-00225-gf01-pt.jpg>> Acesso em 06 de junho de 2016, 13hs.

Figura 16 - Classificação de laje quanto a armação.



Fonte: Próprio autor.

CUNHA & SOUZA (1998, p. 33), afirma que a relação estabelecida como $L > 2l$ como no exemplo citado é válida apenas em lajes retangulares e as atuações de esforços cortantes para estas lajes apresentam o mesmo comportamento dos momentos fletores.

As lajes armadas em duas direções possuem momentos fletores e força cortante consideráveis nas duas direções. Nestas lajes a relação estabelecida entre os lados L , e l , devem possuir grandeza ≤ 2 . Tais lajes são mais econômicas que as lajes armadas em uma direção, pois os momentos fletores gerados em duas direções são menores e conseqüentemente o uso de armadura de combate à flexão. Nestes casos, os momentos fletores são importantes nas duas direções e devem ser calculados. A relação entre o vão menor e o vão maior não é superior a 2. (ARAÚJO, 2003). Segundo a NBR 6118/2014 a determinação dos vãos da laje é dada pela seguinte equação:

$$l = l_0 + a_1 + a_2$$

Eq. 8

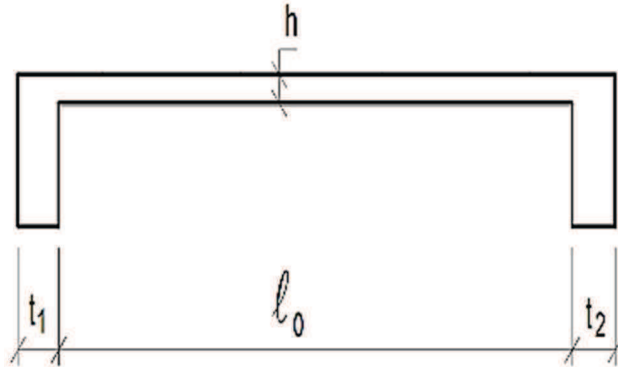
Onde:

a_1 = menor vão entre $(t_1/2)$ e $(0,3h)$;

a_2 = menor vão entre $(t_2/2)$ e $(0,3h)$;

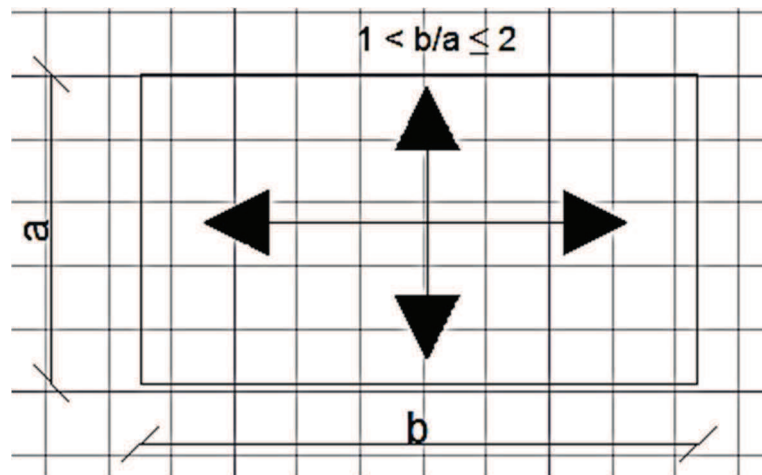
A notação que exemplifica esta relação é dada a seguir:

Figura 17- Determinação dos vãos da laje.



Fonte: UFPA, Estruturas em concreto II, R. Carneiro/2006, p45.



Figura 18- Laje armada em duas direções.



Fonte: Próprio autor.

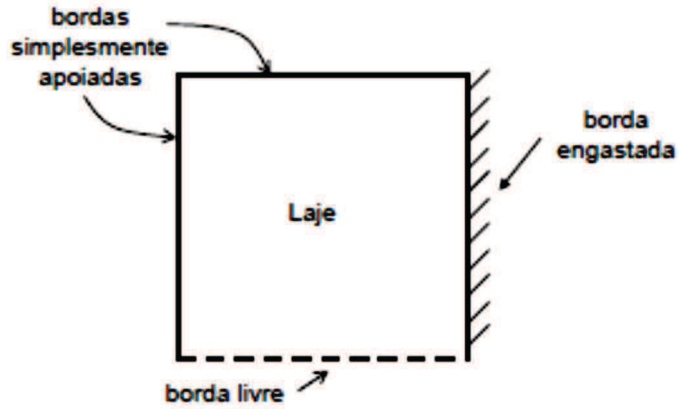
2.3.1.3 Quanto aos tipos de apoios

Os tipos de apoios são os vínculos entre vãos da laje, podendo os apoios serem sobre as vigas, alvenaria, concreto, pilares ou paredes. O cálculo de deformações ocorridas nos elementos estruturais do tipo lajes, depende do tipo de vínculo pré-estabelecido. As lajes podem apresentar três tipos de vínculo, sendo estes do tipo; engaste perfeito; apoio simples e livre:

-  ► - Convenção para vinculação de apoios de Engaste Perfeito.
-  ► - Convenção para vinculação de apoios de Apoio Simples.

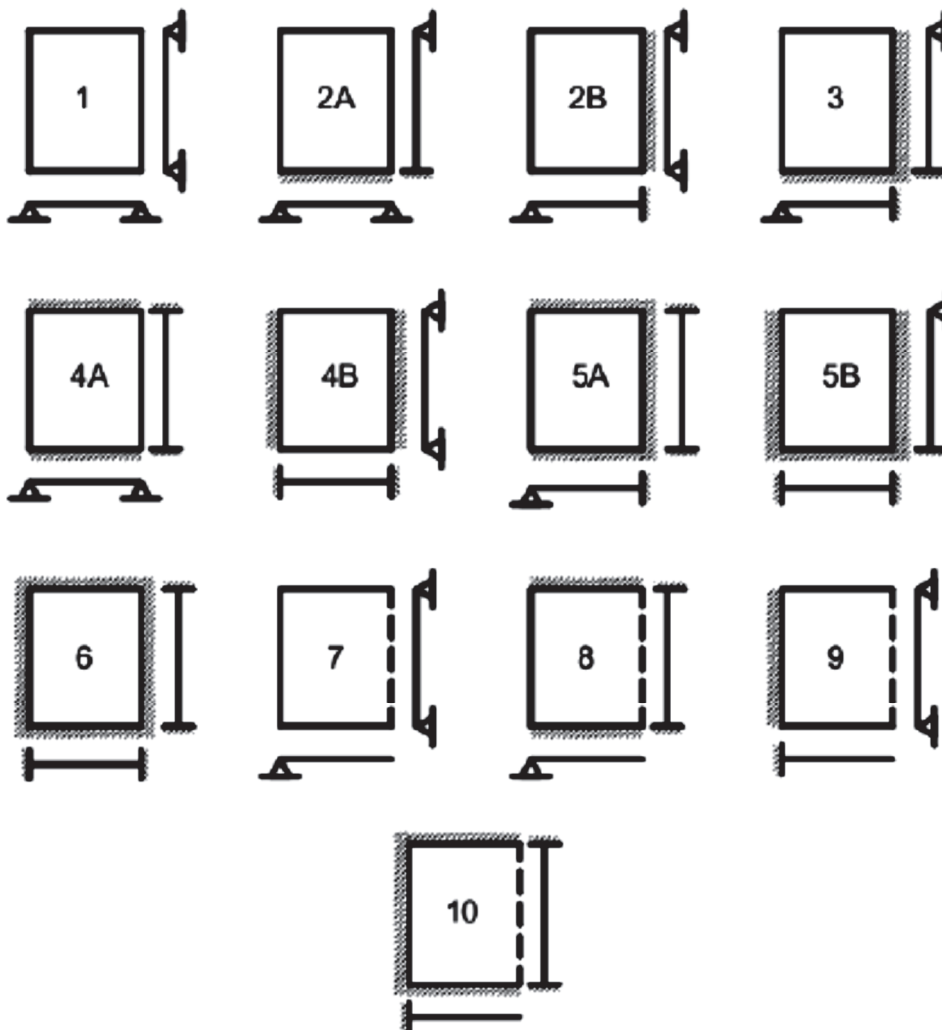
- ----- ▶ - Convenção para vinculação de apoios de borda livre (sem apoio).

Figura 19- Convenção de sinais em tipos de lajes.



Fonte: UFPA, Estruturas em concreto II, R. Carneiro/2006, p53.

Figura 20- Tipo de lajes de acordo com seus vínculo.

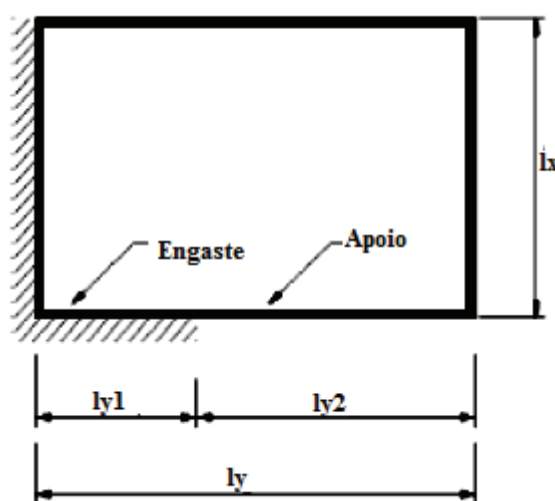


Fonte: Bastos,2005,p42.

As lajes simplesmente apoiadas ou livres permitem a rotação da peça e o engastado a impede de girar, porém na realidade o engastamento perfeito é muito difícil de ser conseguido, assim o que se tem na verdade é um engastamento parcial da peça. Através da utilização de programas computacionais é possível considerar também o engaste elástico. (BASTOS, 2005, p.41). Essa idealização teórica de apoio simples ou engaste perfeito, raramente ocorre na realidade. Porém, conforme Cunha & Souza (1998), o erro cometido é pequeno e não supera os 10% da tração. Normalmente as lajes são apoiadas sobre vigas de concreto nas quais a rigidez à torção é pequena e oferece resistência à torção desprezível, deformando-se e garantindo a concepção teoria de apoio simples.

As tabelas para dimensionamento de lajes consideram os três tipos de engastamento até aqui especificados, porém existem métodos específicos para casos mistos de apoio, como o da figura 21 representados na tabela 4.

Figura 21- Caso específico de vinculação.



Fonte: Libânio M. Pinheiro, Lajes Maciças, p.05, 2010.

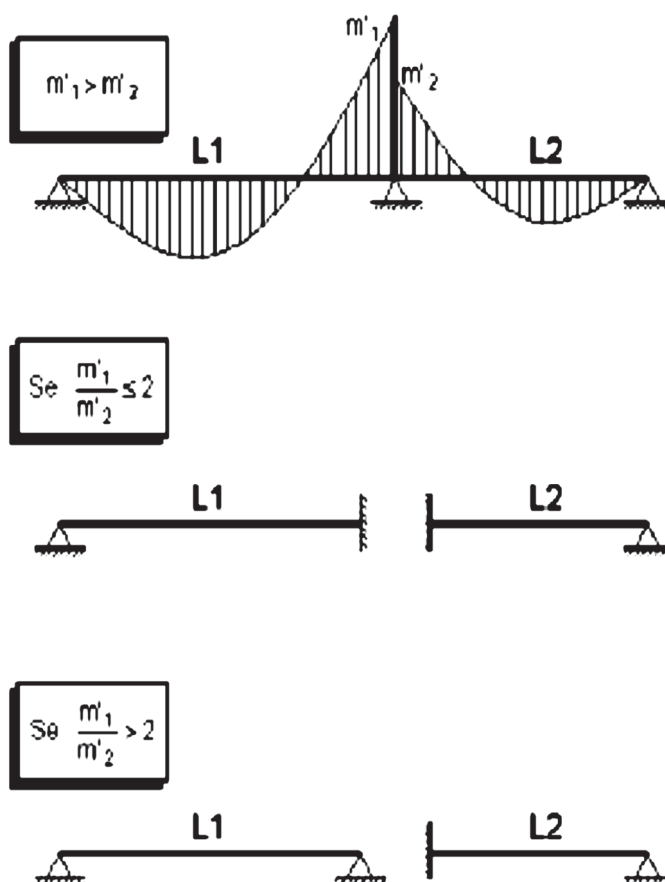
Tabela 4 - Critérios de cálculo para bordas mistas.

$l_{y1} \leq \frac{l_y}{3}$	Considera-se a borda totalmente apoiada.
$\frac{l_y}{3} \leq l_{y1} < \frac{2 \cdot l_y}{3}$	Calculam-se os esforços para as situações- -Borda totalmente apoiada e borda totalmente engastada – E adotam-se maiores valores no dimensionamento.
$l_{y1} \geq \frac{2 \cdot l_y}{3}$	Considera-se a borda totalmente engastada.

Fonte: Libânio M. Pinheiro, Lajes Maciças, 2010, p.05.

Em casos de bordas de engastamento adjacentes as discrepâncias dos esforços gerados proporcionam momentos fletores significativamente diferentes, nestes casos o tipo de apoio a considerar poderá ser estabelecido por alguns critérios. Uma diferença significativa entre os momentos negativos de duas lajes adjacentes poderia levar à consideração de borda engastada para uma das lajes e simplesmente apoiada para a outra, em vez de engastada para ambas (Libânio M. Pinheiro, 2004).

Figura 22- Critério para considerar bordas engastadas.



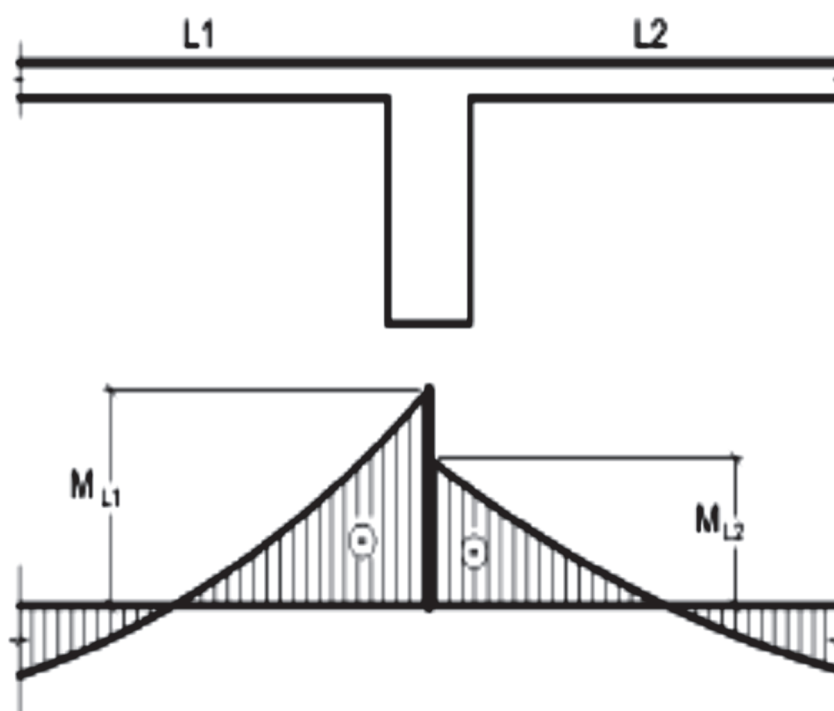
Fonte: Libânio M. Pinheiro, Lajes Maciças, p.05, 2010.

2.3.1.4 Compatibilização de momentos nas bordas

Um outro caso de discrepância dos momentos gerados surge nas lajes contínuas as quais possuem apoios intermediários, em razão das necessidades de edificação de grandes vãos. O caso de haver duas lajes adjacentes faz com que cada laje gere um momento diferente nos apoios. Nestes casos para efeitos de cálculos os apoios devem ser considerados perfeitamente

engastados, também como fazer a compatibilização dos valores adquiridos dos momentos gerados.

Figura 23- Apoios entre lajes e momentos gerados.



Fonte: Bastos 2005, p. 71.

A compatibilização de momentos consiste em adotar a média entre os momentos nos apoios gerados e 80% do maior. Assim ficam definidos como:

$$X \geq \left\{ \begin{array}{l} 0,8 X_1 \\ \frac{X_1 + X_2}{2} \end{array} \right\}, \text{ com } X_1 \geq X_2$$

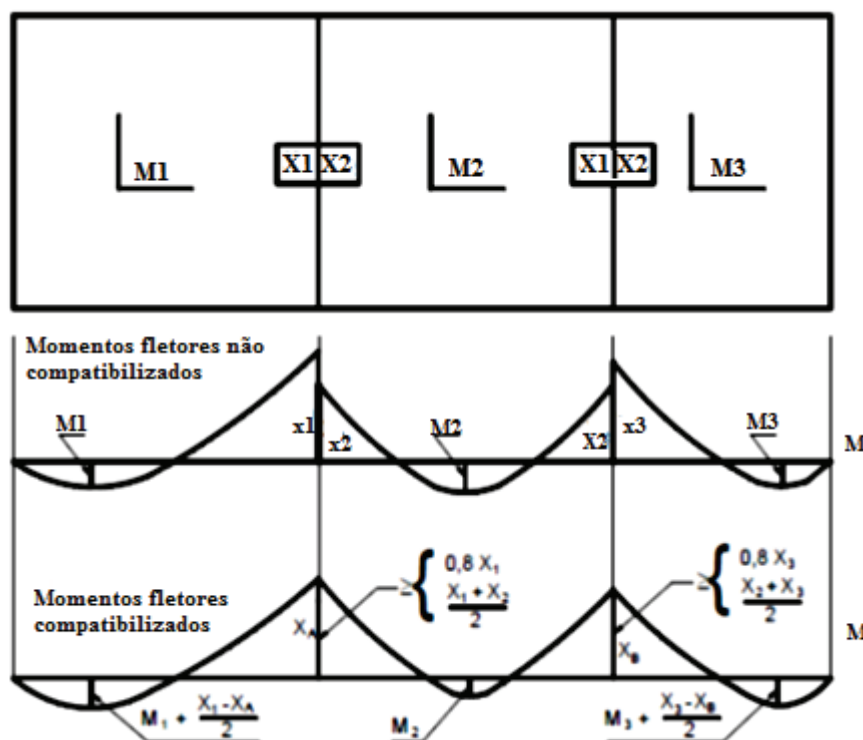
Eq. 9

Quando houver predominância de cargas permanentes, as lajes vizinhas podem ser consideradas isoladas, realizando-se a compatibilização dos momentos sobre os apoios de forma aproximada. No caso de análise plástica, a compatibilização pode ser realizada mediante alteração das razões entre momentos de borda e vão, em procedimento iterativo, até a obtenção de valores equilibrados nas bordas. Permite-se, simplificada, a adoção do maior valor de momento negativo em vez de equilibrar os momentos de lajes diferentes sobre uma borda comum. ” (Bastos, Estruturas em Concreto I, 2015, p.18).

A combinação de momentos fletores positivos e negativos deve ser feita em duas direções da laje. Para a compatibilização dos momentos fletores positivos, estes devem ser

corrigido e aumentados. Nos casos em que a compatibilização desses momentos promoverem o alívio de tensões, (diminuírem numericamente), estes devem ser desconsiderados.

Figura 24- Exemplo de compatibilização de momentos fletores positivos e negativos.



Fonte: Bastos 2015, p71.

2.3.1.5 Espessura/ Cobrimentos Mínimos

A NBR 6118/2014 define as espessuras mínimas para lajes como.

- 5 cm para lajes de cobertura não em balanço;
- 7 cm para lajes de piso ou de cobertura em balanço;
- 10 cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;
- 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN;
- 15 cm para lajes com protensão.

Ainda a mesma NBR define os valores mínimos para cobrimento das armaduras de acordo com o índice de agressividade do meio em que se encontra (índice de agressividade ambiental). Deve-se ressaltar o fator de ponderação Δc , como sendo um fator de segurança para

execução do cobrimento, este que corresponde a 10mm. Assim fica estabelecido que o cobrimento nominal é dado pelo cobrimento mínimo acrescido do fator de ponderação Δc .

Figura 25- Tabela de índice NBR 6118.

Tabela 7.2 – Correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal para $\Delta c = 10$ mm

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (Tabela 6.1)			
		I	II	III	IV ^c
		Cobrimento nominal mm			
Concreto armado	Laje ^b	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo ^d	30		40	50
Concreto protendido ^a	Laje	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

^a Cobrimento nominal da bainha ou dos fios, cabos e cordoalhas. O cobrimento da armadura passiva deve respeitar os cobrimentos para concreto armado.

^b Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros, as exigências desta Tabela podem ser substituídas pelas de 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal ≥ 15 mm.

^c Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.

^d No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal ≥ 45 mm.

Fonte: NBR 6118/2014, p.20.

Ainda segundo a NBR 6118/2014, p.20, para concretos de classe de resistência superior ao mínimo exigido, os cobrimentos definidos na tabela podem ser reduzidos em até 5 mm.

2.4 ANÁLISE ESTRUTURAL

A determinação dos esforços solicitantes da estrutura em lajes é possível após o levantamento de todos os pontos até aqui evidenciados. Logo, faz-se necessário entendimento dos métodos de análise estrutural, com relação ao comportamento dos materiais admitidos, formulando assim um cálculo analítico das estruturas, obedecidos as disposições da NBR 6118.

A NBR 6118 permite cinco tipos de análise, quanto ao comportamento do concreto armado, e exige que o projeto apresente conformidade com pelo menos um desses modelos. Em todos eles, são admitidos pequenos deslocamentos para a estrutura. São eles:

2.4.1 Análise Linear

O comportamento elástico-linear de um material está associado a própria tendência de voltar ao formato inicial, e em função do módulo de elasticidade (E) característico de cada material. No concreto este comportamento é provocado por ações decorrentes dos esforços externos. LEONHARDT & MÖNNIG (1977) afirma que o concreto só tem um comportamento puramente elástico para tensões baixas e de curta duração, ou até aproximadamente 1/3 da resistência à compressão.

Na análise linear, para determinação de esforços solicitantes e verificação de estados limites de serviço, deve-se utilizar o módulo de elasticidade secante (E_{cs}), cujo valor é 85% do módulo de elasticidade tangente inicial (E_{ci}), correspondente à inclinação do início da curva tensão versus deformação, (Fontes & Pinheiro 2003, p.118).

Logo a equação para definição do módulo de elasticidade secante é:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} = \alpha_i \cdot 5600 f_{ck}^{\frac{1}{2}}$$

Eq. 10

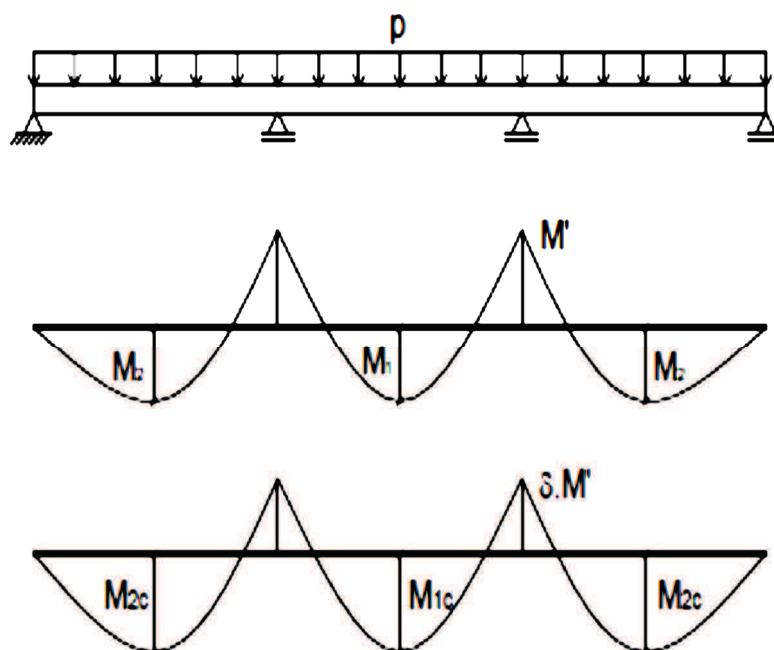
Os esforços solicitantes decorrentes de uma análise linear podem servir de base para o dimensionamento dos elementos estruturais no estado-limite último (ELU), mesmo que esse dimensionamento admita a plastificação dos materiais, desde que se garanta uma ductilidade mínima às peças (NBR 6118, 2014, p.85). Pode-se considerar, como garantia de ductilidade, o dimensionamento nos domínios 1, 2 e 3 e a limitação da posição relativa da linha neutra, x/d , junto aos apoios e em regiões de ligação entre os elementos, (Fontes & Pinheiro 2003, p.118).

2.4.2 Análise Linear com redistribuição

Uma vez realizada a análise linear de uma estrutura, pode-se considerar uma redistribuição dos esforços calculados, decorrente da variação de rigidez dos elementos estruturais. A fissuração, e a conseqüente entrada no estágio II, de determinadas seções

transversais, provoca um remanejamento dos esforços solicitantes, para regiões de maior rigidez, (Fontes & Pinheiro 2003, p.119). Como resultado a análise linear com redistribuição provoca uma redução dos momentos fletores nos apoios e um aumento dos momentos fletores nos vãos.

Figura 26- Diagrama de momentos fletores com e sem redistribuição.



Fonte: Fontes & Pinheiro 2003, p.119

Todos os esforços internos devem ser recalculados, de modo a garantir o equilíbrio de cada um dos elementos estruturais e da estrutura como um todo. Os efeitos de redistribuição devem ser considerados em todos os aspectos do projeto estrutural, inclusive as condições de ancoragem e corte de armaduras e as forças a ancorar, (NBR 6118, 2014, p. 85).

2.4.3 Análise Plástica

A análise plástica deve ser usada para apenas para verificação no estado limite último (ELU), admitindo-se o comportamento de materiais de comportamento rígido plástico perfeito. É denominada assim quando não se consideram as não linearidades da estrutura.

A propriedade do material de guardar deformações residuais é chamada de plasticidade. As principais teorias envolvidas em projetos, que permitem que elementos estruturais sofram certas deformações permanentes, são a teoria das rótulas plásticas, para elementos lineares, e a teoria das charneiras plásticas, para elementos de superfície que trabalhem como placas. Ao se aumentar continuamente o

carregamento de uma viga, por exemplo, um ou mais pontos críticos de momento máximo poderão entrar em escoamento, dando origem a articulações, ou rótulas plásticas. Uma rótula plástica é caracterizada por um aumento plástico da curvatura que pode atingir valor de duas a três vezes maior que o calculado elasticamente. Esse efeito restringe-se a um comprimento de plastificação, em torno dos pontos de momento máximo, nos quais o momento fletor não aumenta mais e passa a ser chamado de momento totalmente plástico, M_p , (Fontes & Pinheiro 2003, p.120).

2.4.4 Análise não linear

Quando a relação entre as deformações e tensões do material não é capaz de ser definido por uma constante diz-se que este material possui comportamento não linear. Os empregos de métodos simplificados de dimensionamento aliados ao comportamento de linearidade dos materiais dão resultados satisfatórios ao comportamento real da estrutura.

Uma análise completamente não-linear ainda exige esforços computacionais muito grandes.... Sua maior complexidade deve-se principalmente ao fato de que toda a geometria da estrutura bem como suas armaduras (estimadas por análise linear) devem ser previamente conhecidas, o que requer um cálculo iterativo. Ao final de cada etapa, têm-se novos esforços, que permitem o cálculo de uma armadura diferente. Essa nova armadura passa a ser utilizada na iteração seguinte. O processo se repete até que a armadura obtida seja próxima da relativa à etapa anterior, (Fontes & Pinheiro 2003, p.121).

Toda a geometria da estrutura e suas armaduras devem ser conhecidas para que a análise não-linear possa ser efetuada, pois a resposta da estrutura depende de como ela foi armada. (NBR 6118/2014). Ainda a NBR 6118 especifica que análises não lineares podem ser admitidas tanto para estado limite último, como para estado limite de serviço.

2.4.5 Análise através de modelos físicos

O emprego de modelos físicos não é comum, pois seu custo é elevado e sua utilização requer equipamentos sofisticados de laboratório e pessoal especializado. A NBR 6118:2014 sugere a análise através de modelos físicos quando os modelos de cálculo forem insuficientes, ou estiverem fora do escopo da Norma. Geralmente, esse tipo de análise é utilizado em obras de grande importância, em termos de prestígio público ou de quantidade de capital investido, servindo para aferir ou ratificar resultados baseados em cálculos analíticos. São casos especiais de dimensionamento.

A tabela seguir mostra resumidamente o tipo de análise quanto aos estados limites de serviço e utilização.

Tabela 5 - Aplicações quanto aos tipos de análise estrutural.

ANÁLISE	VERIFICAÇÃO
Linear	ELU* e ELS
Linear com redistribuição	ELU
Plástica	ELU
Não- Linear	ELU e ELS
Modelos Físicos	ELU e ELS
*Se garantida a ductilidade dos elementos estruturais.	

Fonte:⁵

2.4.6 Dimensionamento de lajes

São definidas na NBR 6118 duas hipóteses básicas para o dimensionamento de elementos de placas. São elas:

- I. Manutenção da seção plana após a deformação, em faixas suficientemente estreitas;
- II. Representação dos elementos por seu plano médio.

Na determinação dos esforços solicitantes nas lajes, deverá ser avaliada a necessidade da consideração da aplicação da alternância das sobrecargas. Para estruturas de edifícios em que a carga variável seja de até 5 kN/m² e que seja no máximo igual a 50 % da carga total, a análise estrutural pode ser realizada sem a consideração de alternância de cargas, (NBR 6118, 2014, p.95).

Ainda segundo a NBR 6118 (Item 17.2.2), o estado-limite último é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios [...]. Os domínios de deformações estão apresentados na figura 27:

⁵ Cadernos de Engenharia de Estruturas. **Tipos de análise estrutural para elementos lineares segundo a NBR 6118/2003**. São Carlos, v. 11, n. 48, p. 117-141, 2009. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/cadernos/nova_versao/pdf/cee52_117.pdf>. Acesso em 14 de junho de 2016, 09:22 hs.

2.5 MÉTODOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

É denominada a Engenharia Estrutural, o conjunto planejamento, projeto construção e manutenção de sistemas estruturais destinados a moradia, trabalho lazer e etc. O estudo do comportamento de uma estrutura tais como campos de tensões, deformações, deslocamentos, e consequentemente a idealização deste estudo são fases da análise estrutural. A análise estrutural tem como objetivo a determinação de esforços internos e externos (cargas e reações de apoio), e das correspondentes tensões, bem como a determinação dos deslocamentos e correspondentes deformações da estrutura que está sendo projetada.

Essa análise deve ser feita para os possíveis estágios de carregamentos e solicitações que devem ser previamente determinados. Existem diversos métodos de cálculo disponíveis para o dimensionamento de estruturas, estes podem ser do tipo numéricos ou simplificados, (Araújo, 2010, p.81), enfim, estes podem ser.

- I. **A teoria das grelhas para lajes sobre apoios rígidos:** Ou método das teorias das grelhas, é usualmente empregado para as lajes armadas em duas direções, que não sejam ancoradas nos cantos.

Pode-se demonstrar facilmente que as soluções da teoria das grelhas garantem o equilíbrio dos momentos totais nas duas direções, (Araújo 2010, p.81).

- II. **Teoria da flexão de placas:** [...] ou Teoria de Kirchhoff-Love, tem como base a Lei de Hooke, que considera os materiais em regime elástico-linear⁶. Segundo CARVALHO, et al, (p.293, 2007) esse método fundamenta-se nas equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa e nas relações de compatibilidade das deformações desse elemento.
- III. **Teoria das linhas de ruptura:** Segundo ARAÚJO 2010, p107, este método considera o equilíbrio da laje no momento que antecede a ruína, ou seja, no estado limite último. A teoria não permite analisar o comportamento da laje nas condições de utilização, o que é uma das desvantagens em relação às soluções elásticas. Considera-se neste método que as lajes próximas do colapso indicarão um caminho através do qual as fissuras irão aparecer. O cálculo das solicitações nos elementos planos é feito considerando que os mesmos se encontram

⁶ Revista Iniciação Científica, v. 11, n. 1, 2013, Criciúma, Santa Catarina. **Análise comparativa entre diferentes métodos de cálculo para o dimensionamento de lajes maciças bidirecionais.** Disponível em: <<http://periodicos.unesc.net/iniciacaoocientifica/article/viewFile/1620/1532>>. Acesso em: 04 de maio de 2016, 08:56hs.

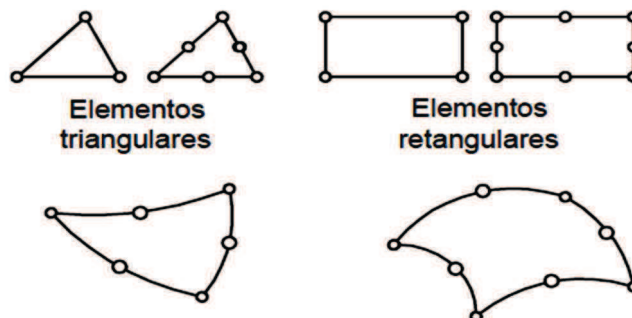
próximos à sua ruína, sendo um método mais adequado para a realidade das lajes em concreto armado (Oliveira Júnior, 2015, p.14).

- IV. Analogia de grelha equivalente.** Consiste na realização do cálculo dos elementos estruturais de modo integrado, assim considera-se o pavimento como um todo. Este método é comumente empregado em programas computacionais e diferente dos métodos simplificados não considera a laje como elemento isolado da estrutura possibilitando assim a análise rápida da estrutura de elementos poligonais.

A analogia da grelha equivalente é um dos métodos numéricos mais utilizados para análise de lajes de concreto armado, estando implementado em diversos softwares comerciais. O método pode ser utilizado para a análise de lajes poligonais de formas diversas, incluindo também as vigas de apoio. Desse modo, podem-se calcular os esforços no pavimento como um todo, levando-se em conta as deformações das vigas, (Araújo 2014, p. 117).

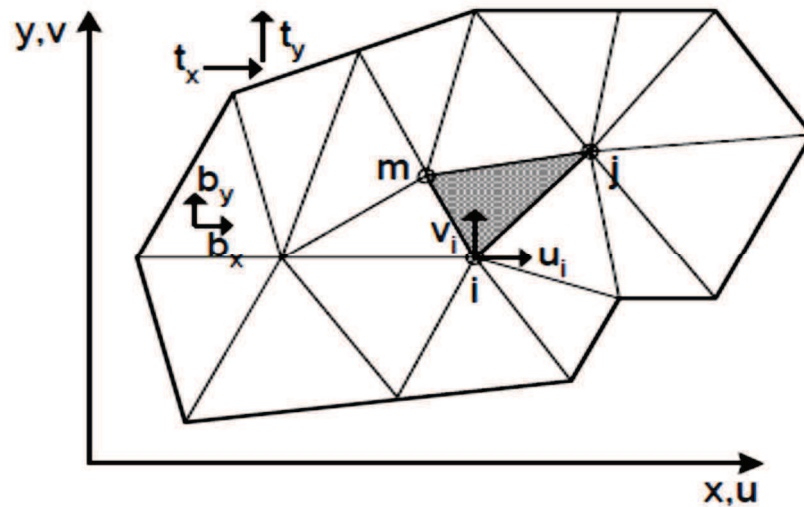
- V. Método das diferenças finitas:** É um método numérico que foi bastante empregado no passado. Geralmente, admite-se que o material é elástico linear, mas é possível incluir a não linearidade física sem maiores dificuldades. O grande inconveniente do método está na dificuldade de generalização das condições de contorno e de carregamento, motivos pelos quais ele tem sido abandonado, (ZENZEN, 2012, p.33).
- VI. Método dos elementos finitos.** Este método consiste na subdivisão dos elementos de um problema em um conjunto de pequenos elementos, daí a denominação de elementos finitos, com um número equivalente de nós, originando-se assim uma malha de elementos, definidos geometricamente. Segundo (ARAÚJO 2010, p.132). Estes elementos podem ser triangulares, de três e de seis nós; retangulares de quatro e de oito nós e os elementos isoparamétricos, (elementos distorcidos, que permitem uma boa modelagem de domínios irregulares) e comparando-se a outros métodos o aumento de número de nós empregados no método dos elementos finitos, formula resultados mais precisos da análise estrutural.

Figura 28- Exemplificação de elementos finitos.



Fonte: Araújo, 2015, p.133.

Figura 29- Exemplificação de malha de elementos finitos.



Fonte: Araújo, 2015, p.133.

2.6 A TEORIA DA ELASTICIDADE

Os comportamentos dos materiais definidos matematicamente segundo a lei de Hooke⁷ e Navier⁸, podem fornecer resultado precisos quanto ao comportamento do concreto armado, visto que o concreto possui um comportamento elasto-plástico. Segundo Werner e Vargas⁹ Posteriormente Kirchhoff-Love Lagrange formulou uma equação fundamental para explicar o comportamento de placas delgadas a partir de observações de força e deslocamentos dos materiais, considerando suas propriedades. No entanto com se trata de uma equação de quarta ordem a resolução pode ser bastante complexa.

Eq. 11

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p}{K}$$

⁷ Hooke estabeleceu uma Lei a qual relaciona a Força Elástica (F_{el}), reação causada pela força aplicada, e a deformação da mola (Δl). A intensidade da Força elástica (F_{el}) é diretamente proporcional à deformação (Δl).

⁸ As equações de Navier Stokes descrevem o escoamento de fluidos, podem determinar os campos de velocidade e de pressão num escoamento.

⁹ Revista Iniciação Científica, v. 11, n. 1, 2013, Criciúma, Santa Catarina. **Análise comparativa entre diferentes métodos de cálculo para o dimensionamento de lajes maciças bidirecionais.** Disponível em: <<http://periodicos.unesc.net/iniciacaoocientifica/article/viewFile/1620/1532>>. Acesso em: 04 de maio de 2016, 08:56hs.

Onde:

w = deslocamento vertical.

x, y = coordenadas de um ponto da placa.

p = carga atuante.

K = rigidez à flexão da placa.

Considerando E , módulo de elasticidade da placa, ν o Coeficiente De Poisson, e h a espessura da mesma; K pode ser definido pela seguinte equação:

$$K = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{Eq. 12}$$

Os momentos fletores (m) e a força cortante (v) por unidade de largura, logo serão definidas mediante as equações:

$$m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{Eq. 13}$$

$$m_y = K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{Eq. 14}$$

$$V_x = K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \cdot \partial y^2} \right) \quad \text{Eq. 15}$$

$$V_y = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \cdot \partial x^2} \right) \quad \text{Eq. 16}$$

Os momentos de torção poderão serem definidos:

$$T_{xy} = -T_{yx} = D(1-\nu) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \quad \text{Eq. 17}$$

2.6.1 Solução por meio de séries

A partir das equações Lagrange, foram elaborados diversos processos de resolução, que dentre os consolidados, são usuais a Resolução por Meio de Séries, (Teoria Simplificada de

Marcus, Processo de Grelha Equivalente, Método de Diferenças Finitas, e Métodos dos Elementos Finitos).

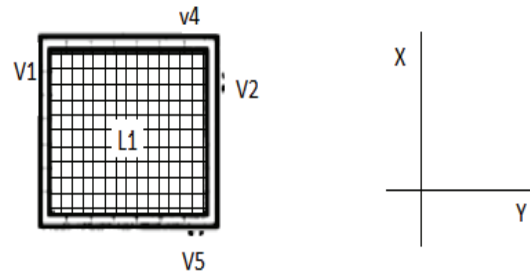
Navier e Lévy estipularam soluções para a equação geral das placas (Equação de Lagrange), porém é um processo longo e inviável nos dias atuais, (Werner & Vargas, 2013)¹⁰. Segundo Bastos (2005, p. 19), a solução destas equações motivou o surgimento de diversas tabelas, de diferentes origens e autores, com coeficientes que proporcionam o cálculo dos momentos fletores e das flechas para casos específicos de apoios e carregamentos. São exemplo destas tabelas, as confeccionadas por Marcus, Bares, Szilard, Stiglat/Wippel, Kalmanok e Czerny. Tais tabelas facilitam a execução do cálculo, podendo estes serem executados manualmente. As tabelas têm sido usadas, geralmente, para o cálculo de lajes isoladas com condições de apoio simples, engastados ou livres (Banki & Coelho, 2009, p.46). No caso do apoio em vigas, a flexibilidade é geralmente desprezada, o que, em alguns casos, pode resultar em grandes diferenças nos valores dos esforços e nos deslocamentos verticais. Conforme ARAÚJO (2003, p152), as tabelas encontradas na literatura podem apresentar algumas diferenças devido ao valor adotado para o coeficiente de Poisson.

2.6.2 Teoria de Marcus

A efetivação de um cálculo de lajes considerando-as como elemento único entre os vãos, ou seja, limitar a continuidade da mesma considerando apenas o vão efetivo e condições de engastamento, e, considerando como um reticulado de vigas nas duas direções (X e Y), estes que por sua vez recebem as cargas atuantes, e acidentais, (q_x e q_y) é de fácil execução (exemplo nas figuras abaixo), porém, falho.

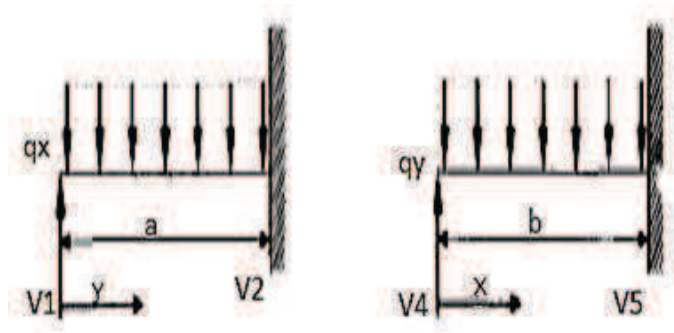
¹⁰ Revista Iniciação Científica, v. 11, n. 1, 2013, Criciúma, Santa Catarina. **Análise comparativa entre diferentes métodos de cálculo para o dimensionamento de lajes maciças bidirecionais.** Disponível em: <<http://periodicos.unesc.net/iniciacaoocientifica/article/viewFile/1620/1532>>. Acesso em: 04 de maio de 2016, 08:56hs.

Figura 30- Malha de vigas.



Fonte: Adaptada de, Estruturas em Concreto Armado, IFES¹¹, p.3.

Figura 31 - Cargas acidentais atuantes.



Fonte: BRITO, Estruturas em concreto armado, IFES, p.3.

Figura 32 - Momentos fletores resolvidos.



Fonte: BRITO, Estruturas em concreto armado, IFES, p.3.

¹¹ Instituto Federal do Espírito Santo.

A falha deste processo consiste em não consideração do aspecto de continuidade da laje, limitando assim a interpretação precisa das ações atuantes, assim o processo de cálculo de Marcus considera os exemplos citados além de aplicar os coeficientes adequados que levam em conta a continuidade das lajes, as ações de solidariedade conjunta total de toda a malha de vigas da estrutura. No método de Marcus esse efeito de redução dos momentos é introduzido de forma aproximada sendo que os momentos fletores positivos corrigidos, M_{x0} e M_{y0} são dados por:

$$M_{x0} = C_x M_x \quad \text{e,} \quad M_{y0} = C_y M_y \quad \text{Eq. 18}$$

Os coeficientes estudados por Marcus, segundo Araújo (2003, p. 71) dependem das condições de contorno e da relação entre os vãos da laje.

$$C_x = 1 - \frac{20k_x}{3M_x\lambda^2} \quad \text{Eq. 19}$$

$$C_y = 1 - \frac{20k_y}{3M_y\lambda^2} \quad \text{Eq. 20}$$

Onde:

M_x e M_y = Coeficientes dos momentos positivos para faixas isoladas. Dependem das condições de apoio nas direções x e y.

K_x e K_y = Obtidos pela teoria das grelhas.

Exemplificadas as considerações das tabelas de Marcus, calcula-se então a relação entre os vãos da laje (λ):

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \text{Eq. 21}$$

Assim permite-se o cálculo imediato dos momentos fletores positivos e negativos obedecidos os coeficientes de redução de Marcus (tabelados), através das Equações:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} \quad \text{e,} \quad M_y = \frac{p \cdot l_y^2}{m_y} \quad \text{Eq. 22}$$

$$M_{xe} = \frac{p \cdot l_x^2}{n_x} \quad e, \quad M_{ye} = \frac{p \cdot l_y^2}{n_y}$$

Onde:

M_x e M_y = momento fletor positivo nas direções x e y (kN.m/m);

M_{xe} e M_{ye} = momento fletor negativo nas direções x e y (kN.m/m);

p = carga total uniformemente distribuída (kN/m²);

m_x e m_y = coeficientes para cálculo dos momentos fletores positivos atuantes nas direções paralelas a l_x e l_y , respectivamente;

n_x e n_y = coeficientes para cálculo dos momentos fletores positivos atuantes nas direções paralelas a l_x e l_y , respectivamente;

l_x = É o menor vão da laje para o caso de igualdade de engastamentos ou a direção onde houver o maior número de engastes, em metros.

Na ausência de recursos computacionais e na análise prévia das estruturas em estudos de viabilidade de implantação, as tabelas de Marcus são amplamente utilizadas. Neste método as lajes são calculadas com base na teoria das grelhas para o cálculo de placas. Apesar de constituir um avanço em relação à teoria das grelhas, é um método simplificado e aproximado, mas produz resultados satisfatórios nos projetos de lajes de concreto armado e por isso é bastante empregado Araújo (2003, p.70). O processo de cálculo pela analogia de grelhas considera os elementos como placas propriamente ditas, estipulando-se assim resultados maiores para os momentos fletores que o Método de Marcus, visto no método de Marcus não se consideram os efeitos de continuidades e momentos torçores nas lajes. As tabelas de Marcus são aplicáveis aos tipos de lajes especificados na figura 20, os coeficientes de Marcus já se encontram calculados nas tabelas 6 a 12.

O aparecimento desses coeficientes de redução resulta de imperfeição da teoria das grelhas, que supõe os quinhões constantes e imagina a laje constituída por faixas independentes, ao passo que ela forma um conjunto único, isto é, funciona como uma placa que se deforma no espaço sendo as flechas menores do que as que resultam da teoria das grelhas, e, portanto, menores os momentos (ROCHA, 1999, p. 54).

Os coeficientes estudados por Marcus, segundo Araújo (2003, p. 71) dependem das condições de contorno e da relação entre os vãos da laje. A partir da relação entre as condições de contorno da laje, Marcus elaborou uma tabela com a finalidade de facilitar o dimensionamento manual.

Tabela 6 – Tabela de Coeficientes de Marcus – Lajes do tipo1.

ly/lx	m_x	m_y	ly/lx	m_x	m_y
1,00	27,4	27,4	1,50	13,9	31,3
1,01	27,0	27,4	1,51	13,8	31,4
1,02	26,5	27,4	1,52	13,7	31,6
1,03	26,0	27,4	1,53	13,6	31,8
1,04	25,6	27,5	1,54	13,5	31,9
1,05	25,1	27,5	1,55	13,4	32,1
1,06	24,6	27,5	1,56	13,3	32,3
1,07	24,2	27,5	1,57	13,2	32,4
1,08	23,7	27,5	1,58	13,1	32,6
1,09	23,2	27,6	1,59	13,0	32,8
1,10	22,8	27,6	1,60	12,9	33,0
1,11	22,4	27,6	1,61	12,8	33,2
1,12	22,1	27,7	1,62	12,7	33,4
1,13	21,8	27,7	1,63	12,6	33,6
1,14	21,4	27,8	1,64	12,5	33,8
1,15	21,1	27,8	1,65	12,4	34,0
1,16	20,8	27,8	1,66	12,4	34,2
1,17	20,4	27,9	1,67	12,3	34,4
1,18	20,1	27,9	1,68	12,2	34,6
1,19	19,8	27,9	1,69	12,1	34,8
1,20	19,4	28,0	1,70	12,0	35,0
1,21	19,2	28,1	1,71	12,0	35,2
1,22	19,0	28,2	1,72	11,8	35,5
1,23	18,7	28,3	1,73	11,8	35,7
1,24	18,5	28,4	1,74	11,7	35,9
1,25	18,2	28,4	1,75	11,7	36,2
1,26	18,0	28,5	1,76	11,6	36,4
1,27	17,7	28,6	1,77	11,5	36,7
1,28	17,5	28,7	1,78	11,5	36,9
1,29	17,2	28,8	1,79	11,4	37,1
1,30	17,0	28,8	1,80	11,4	37,4
1,31	16,8	28,9	1,81	11,4	37,6
1,32	16,7	29,0	1,82	11,3	37,8
1,33	16,5	29,1	1,83	11,3	38,1
1,34	16,3	29,2	1,84	11,2	38,3
1,35	16,1	29,3	1,85	11,2	38,5
1,36	16,0	29,5	1,86	11,1	38,8
1,37	15,8	29,6	1,87	11,1	39,0
1,38	15,6	29,7	1,88	11,0	39,2
1,39	15,4	29,8	1,89	11,0	39,5
1,40	15,2	29,9	1,90	11,0	39,7
1,41	15,1	30,0	1,91	10,9	40,0
1,42	14,9	30,2	1,92	10,9	40,2
1,43	17,8	30,3	1,93	10,8	40,5
1,44	14,7	30,5	1,94	10,8	40,8
1,45	14,5	30,6	1,95	10,8	41,0
1,46	14,4	30,7	1,96	10,7	41,3
1,47	14,3	30,9	1,97	10,7	41,6
1,48	14,1	31,0	1,98	10,6	41,8
1,49	14,0	31,2	1,99	10,6	42,1
1,50	13,9	31,3	2,00	10,6	42,3

Fonte: Rodrigues 2011.

Tabela 7 – Tabela de coeficientes de Marcus – Lajes do tipo 2A e 2B.

l_y/l_x	M_x	m_y	n_x	l_y/l_x	m_x	m_y	n_x
0,50	140,9	45,1	59,2	1,00	29,9	36,7	11,2
0,51	134,2	44,3	55,2	1,02	29,1	37,2	11,0
0,52	127,5	43,4	51,6	1,04	28,3	37,7	10,8
0,53	120,8	42,6	48,2	1,06	27,5	38,2	10,6
0,54	114,1	41,8	45,5	1,08	26,7	38,7	10,4
0,55	107,4	40,9	43,0	1,10	26,0	39,3	10,2
0,56	101,0	40,4	40,4	1,12	25,5	39,9	10,1
0,57	98,5	39,8	38,1	1,14	25,0	40,5	9,9
0,58	94,1	39,3	36,2	1,16	24,4	41,2	9,8
0,59	89,7	38,7	34,5	1,18	23,8	41,8	9,6
0,60	85,3	38,1	32,7	1,20	23,4	42,6	9,5
0,61	82,3	37,7	31,1	1,22	23,0	43,3	9,4
0,62	79,4	37,3	29,6	1,24	22,6	44,1	9,3
0,63	76,4	36,9	28,3	1,26	22,2	44,9	9,3
0,64	73,5	36,5	27,1	1,28	21,8	45,7	9,2
0,65	70,6	36,1	25,9	1,30	21,4	46,6	9,1
0,66	69,3	35,9	24,8	1,32	21,1	47,6	9,1
0,67	66,0	35,7	23,9	1,34	20,8	48,5	9,0
0,68	63,8	35,5	21,0	1,36	20,5	49,5	8,9
0,69	61,6	35,3	22,1	1,38	20,2	50,4	8,9
0,70	59,8	35,1	21,3	1,40	20,0	51,2	8,8
0,71	57,6	34,9	20,6	1,42	19,6	52,2	8,8
0,72	56,0	34,9	20,0	1,44	19,4	53,2	8,8
0,73	54,3	34,7	19,3	1,46	19,6	54,2	8,7
0,74	52,6	34,6	18,7	1,48	19,2	55,2	8,7
0,75	50,9	34,5	18,1	1,50	19,0	56,3	8,6
0,76	49,7	34,5	17,6	1,52	18,8	57,2	8,6
0,77	48,4	34,5	17,1	1,54	18,7	58,3	8,6
0,78	47,2	34,4	16,6	1,56	18,6	59,4	8,6
0,79	45,9	34,4	16,2	1,58	18,5	60,6	8,5
0,80	44,6	34,3	15,8	1,60	18,3	61,9	8,5
0,81	43,6	34,3	15,4	1,62	18,2	63,1	8,5
0,82	42,6	34,4	15,1	1,64	18,0	64,3	8,4
0,83	41,7	34,4	14,8	1,66	17,8	65,6	8,4
0,84	40,7	34,5	14,4	1,68	17,7	66,9	8,4
0,85	39,7	34,5	14,1	1,70	17,6	68,1	8,4
0,86	38,9	34,6	13,9	1,72	17,5	69,3	8,4
0,87	38,1	34,7	13,6	1,74	17,4	70,5	8,4
0,88	37,3	34,8	13,4	1,76	17,3	71,7	8,3
0,89	36,5	34,8	13,1	1,78	17,2	72,8	8,3
0,90	35,7	35,0	12,9	1,80	17,0	74,0	8,3
0,91	35,1	35,1	12,7	1,82	16,9	75,5	8,3
0,92	34,5	35,3	12,5	1,84	16,8	77,0	8,3
0,93	33,9	35,5	12,3	1,86	16,8	78,5	8,3
0,94	33,3	35,6	12,1	1,88	16,7	80,1	8,2
0,95	32,7	35,8	11,9	1,90	16,6	81,7	8,2
0,96	32,2	36,0	11,8	1,92	16,6	83,2	8,2
0,97	31,6	36,2	11,6	1,94	16,6	84,7	8,2
0,98	31,0	36,3	11,5	1,96	16,5	86,2	8,2
0,99	30,4	36,5	11,3	1,98	16,5	87,7	8,2
1,00	29,9	36,7	11,2	2,00	16,5	89,2	8,2

Fonte: Rodrigues 2011.

Tabela 8 - Tabela de coeficientes de Marcus – Lajes do tipo 3.

l_y/l_x	m_x	m_y	n_x	n_y	l_y/l_x	m_x	m_y	n_x	n_y
1,00	37,1	37,1	16,0	16,0	1,50	20,6	46,4	9,6	21,6
1,01	36,5	37,2	15,7	16,0	1,51	20,5	46,8	9,5	21,8
1,02	35,9	37,2	15,4	16,0	1,52	20,4	47,1	9,5	22,0
1,03	35,3	37,3	15,1	16,1	1,53	20,3	47,5	9,4	22,2
1,04	34,7	37,3	14,9	16,1	1,54	20,2	47,8	9,4	22,4
1,05	34,1	37,4	14,6	16,1	1,55	20,0	48,2	9,4	22,6
1,06	33,5	37,4	14,4	16,2	1,56	19,9	48,5	9,3	22,8
1,07	32,9	37,5	14,1	16,2	1,57	19,8	48,9	9,3	23,0
1,08	32,3	37,5	13,9	16,2	1,58	19,7	49,2	9,2	23,2
1,09	31,7	37,6	13,7	16,3	1,59	19,6	49,6	9,2	23,4
1,10	31,1	37,6	13,5	16,3	1,60	19,5	49,9	9,2	23,7
1,11	30,6	37,7	13,3	16,3	1,61	19,4	50,3	9,2	23,9
1,12	30,2	37,8	13,1	16,4	1,62	19,3	50,7	9,1	24,1
1,13	29,8	38,0	12,9	16,5	1,63	19,2	51,0	9,1	24,3
1,14	29,4	38,1	12,8	16,6	1,64	19,1	51,4	9,1	24,5
1,15	29,0	38,2	12,6	16,7	1,65	19,0	51,8	9,1	24,8
1,16	28,6	38,4	12,4	16,7	1,66	19,0	52,2	9,0	25,0
1,17	28,2	38,5	12,3	16,8	1,67	18,9	52,6	9,0	25,2
1,18	27,8	38,6	12,2	16,9	1,68	18,8	53,0	9,0	25,4
1,19	27,4	38,8	12,0	17,0	1,69	18,7	53,4	9,0	25,6
1,20	27,0	38,9	11,9	17,1	1,70	18,6	53,8	8,9	25,9
1,21	26,7	39,1	11,8	17,2	1,71	18,5	54,2	8,9	26,1
1,22	26,4	39,3	11,6	17,3	1,72	18,4	54,7	8,9	26,4
1,23	26,1	39,5	11,5	17,4	1,73	18,4	55,1	8,9	26,6
1,24	25,9	39,7	11,4	17,6	1,74	18,3	56,6	8,9	26,9
1,25	25,7	39,9	11,3	17,7	1,75	18,2	56,0	8,8	27,1
1,26	25,4	40,0	11,2	17,8	1,76	18,2	56,5	8,8	27,4
1,27	25,1	40,2	11,1	17,9	1,77	18,1	56,9	8,8	27,6
1,28	24,8	40,4	11,0	18,0	1,78	18,0	57,4	8,8	27,9
1,29	24,5	40,6	10,9	18,1	1,79	18,0	57,8	8,8	28,1
1,30	24,2	40,8	10,8	18,3	1,80	17,9	58,2	8,8	28,4
1,31	24,0	41,0	10,7	18,4	1,81	17,8	58,7	8,8	28,6
1,32	23,8	41,3	10,6	18,6	1,82	17,8	59,2	8,7	28,9
1,33	23,6	41,5	10,6	18,7	1,83	17,7	59,6	8,7	29,2
1,34	23,4	41,8	10,5	18,9	1,84	17,7	60,1	8,7	29,5
1,35	23,2	42,0	10,4	19,0	1,85	17,6	60,6	8,7	29,7
1,36	23,0	42,3	10,4	19,2	1,86	17,6	61,0	8,7	30,0
1,37	22,8	42,5	10,3	19,3	1,87	17,5	61,5	8,7	30,3
1,38	22,6	42,6	10,2	19,5	1,88	17,5	62,0	8,6	30,6
1,39	22,3	43,0	10,1	19,6	1,89	17,4	62,4	8,6	30,9
1,40	22,1	43,3	10,1	19,8	1,90	17,4	62,9	8,6	31,2
1,41	22,0	43,6	10,0	19,9	1,91	17,3	63,4	8,6	31,4
1,42	21,8	43,9	10,0	20,1	1,92	17,3	63,9	8,6	31,7
1,43	21,7	44,2	9,9	20,3	1,93	17,3	64,4	8,6	32,0
1,44	21,5	44,5	9,9	20,5	1,94	17,2	64,9	8,6	32,2
1,45	21,4	44,8	9,8	20,6	1,95	17,2	65,4	8,6	32,5
1,46	21,2	45,1	9,8	20,8	1,96	17,1	65,9	8,5	32,8
1,47	21,1	45,4	9,7	21,0	1,97	17,1	66,4	8,5	33,0
1,48	20,9	45,7	9,7	21,2	1,98	17,0	66,9	8,5	33,3
1,49	20,8	46,0	9,6	21,4	1,99	17,0	67,4	8,5	33,6
1,50	20,6	46,4	9,6	21,6	2,00	17,0	67,9	8,5	33,9

Fonte: Rodrigues 2011.

Tabela 9 - Tabela de Coeficientes de Marcus - Lajes do tipo 4A e 4B.

l_y/l_x	m_x	m_y	n_x	l_y/l_x	m_x	m_y	n_x
0,50	136,1	49,9	50,4	1,00	37,5	55,7	14,4
0,51	130,4	49,3	47,4	1,02	36,8	57,0	14,2
0,52	124,6	48,6	44,7	1,04	36,2	58,3	14,1
0,53	118,9	48,0	42,4	1,06	35,5	59,6	14,0
0,54	113,1	47,3	40,3	1,08	34,8	60,9	13,8
0,55	107,4	46,6	38,2	1,10	34,2	62,2	13,6
0,56	103,4	46,3	36,3	1,12	33,7	63,9	13,5
0,57	99,5	45,9	34,8	1,14	33,2	65,6	13,5
0,58	95,9	45,6	33,2	1,16	32,8	67,2	13,4
0,59	91,6	45,2	31,8	1,18	32,3	68,9	13,3
0,60	87,6	44,8	30,5	1,20	31,9	70,6	13,2
0,61	84,8	44,6	29,4	1,22	31,6	72,4	13,1
0,62	82,0	44,5	28,2	1,24	31,3	74,3	13,0
0,63	79,3	44,3	27,3	1,26	31,0	76,0	13,0
0,64	76,6	44,2	26,3	1,28	30,7	77,8	12,9
0,65	73,8	44,0	25,4	1,30	30,3	79,7	12,9
0,66	71,8	44,0	24,7	1,32	30,1	81,7	12,8
0,67	69,8	44,0	23,9	1,34	29,9	83,7	12,8
0,68	67,7	44,1	23,2	1,36	29,7	85,7	12,7
0,69	65,7	44,1	22,6	1,38	29,5	87,7	12,6
0,70	63,7	44,1	22,0	1,40	29,2	89,7	12,6
0,71	62,2	44,3	21,4	1,42	29,1	91,9	12,6
0,72	60,7	44,4	21,0	1,44	28,9	94,1	12,6
0,73	59,2	44,6	20,4	1,46	28,7	96,3	12,5
0,74	57,7	44,7	20,0	1,48	28,5	98,5	12,5
0,75	56,2	44,9	19,6	1,50	28,3	100,7	12,5
0,76	55,0	45,1	19,2	1,52	28,1	103,1	12,5
0,77	53,8	45,4	18,9	1,54	28,0	105,5	12,4
0,78	52,6	45,6	18,5	1,56	27,9	107,9	12,4
0,79	51,5	45,9	18,2	1,58	27,7	110,3	12,4
0,80	50,4	46,2	17,9	1,60	27,6	112,6	12,4
0,81	49,5	46,5	17,6	1,62	27,5	115,2	12,4
0,82	48,6	46,9	17,3	1,64	27,4	117,8	12,3
0,83	47,8	47,2	17,1	1,66	27,3	120,4	12,3
0,84	46,9	45,6	16,8	1,68	27,2	122,9	12,3
0,85	46,0	48,0	16,6	1,70	27,1	125,4	12,3
0,86	45,3	48,4	16,4	1,72	27,0	128,1	12,3
0,87	44,6	48,9	16,2	1,74	27,0	130,8	12,3
0,88	43,9	49,3	16,0	1,76	26,9	133,5	12,3
0,89	43,2	49,8	15,9	1,78	26,8	136,3	12,3
0,90	42,5	50,2	15,7	1,80	26,7	139,1	12,2
0,91	42,0	50,7	15,5	1,82	26,6	143,0	12,2
0,92	41,4	51,2	15,4	1,84	26,5	145,9	12,2
0,93	40,9	51,7	15,2	1,86	26,5	148,8	12,2
0,94	40,1	52,2	15,1	1,88	26,4	151,7	12,2
0,95	39,7	52,8	14,9	1,90	26,4	153,6	12,2
0,96	39,2	53,3	14,8	1,92	26,3	156,7	12,2
0,97	38,8	53,9	14,7	1,94	26,3	159,7	12,2
0,98	38,1	54,6	14,6	1,96	26,2	162,8	12,2
0,99	37,9	55,1	14,5	1,98	26,1	165,8	12,2
1,00	37,5	55,7	14,4	2,00	26,1	168,9	12,1

Fonte: Rodrigues 2011.

Tabela 10 - Tabela de Coeficientes de Marcus - Lajes do tipo 5A e 5B.

l_y/l_x	m_x	m_y	n_x	n_y	l_y/l_x	m_x	m_y	n_x	n_y
0,50	246,4	71,5	108,1	35,6	1,00	44,2	50,6	18,0	24,0
0,51	234,5	69,8	100,8	34,7	1,02	43,1	51,3	17,6	24,3
0,52	222,6	68,1	94,4	33,8	1,04	42,0	52,0	17,2	24,7
0,53	210,7	66,4	85,2	32,9	1,06	40,9	52,7	16,8	25,1
0,54	195,8	64,7	82,7	32,1	1,08	39,9	53,4	16,4	25,5
0,55	187,0	63,0	77,3	31,3	1,10	38,9	54,0	16,1	25,9
0,56	177,3	61,8	72,6	30,6	1,12	38,1	54,9	15,9	26,4
0,57	167,6	60,6	68,5	29,9	1,14	37,4	55,8	15,6	26,9
0,58	157,9	59,4	64,8	29,2	1,16	36,7	56,7	15,4	27,4
0,59	148,2	58,2	61,5	28,6	1,18	36,0	57,6	15,1	28,0
0,60	138,6	57,1	58,2	28,0	1,20	35,3	58,5	14,9	28,6
0,61	132,9	56,4	55,3	27,5	1,22	34,8	59,7	14,7	29,2
0,62	127,2	55,8	52,3	27,0	1,24	34,3	60,8	14,5	29,8
0,63	121,5	55,1	49,9	26,5	1,26	33,8	61,9	14,4	30,4
0,64	115,9	54,3	47,6	26,1	1,28	33,3	63,1	14,3	31,1
0,65	110,3	53,3	45,6	25,7	1,30	32,8	64,2	14,1	31,8
0,66	106,3	52,9	43,6	25,3	1,32	32,4	65,4	14,0	32,5
0,67	102,3	52,4	41,7	25,0	1,34	32,0	66,7	13,9	33,2
0,68	98,4	52,0	40,0	24,7	1,36	31,6	68,0	13,8	34,0
0,69	94,5	51,4	38,5	24,4	1,38	31,3	69,3	13,7	34,7
0,70	90,6	50,9	37,0	24,1	1,40	31,0	70,5	13,6	35,5
0,71	87,8	50,6	35,7	23,0	1,42	30,7	71,9	13,5	36,3
0,72	85,0	50,2	34,4	23,7	1,44	30,4	71,3	13,4	37,1
0,73	82,2	49,9	33,2	23,5	1,46	30,1	74,8	13,3	37,9
0,74	79,4	49,5	32,0	23,3	1,48	29,0	76,2	13,3	38,7
0,75	76,6	49,2	30,9	23,2	1,50	29,7	77,7	13,2	39,5
0,76	74,5	49,1	30,0	23,1	1,52	29,5	79,3	13,1	40,4
0,77	72,4	48,9	29,0	23,0	1,54	29,3	80,9	13,1	41,3
0,78	70,3	48,8	28,2	22,9	1,56	29,1	82,5	13,0	42,2
0,79	68,2	48,6	27,4	22,8	1,58	28,9	84,1	13,0	43,1
0,80	66,2	48,4	26,7	22,7	1,60	28,7	85,7	12,9	44,0
0,81	64,6	48,4	26,0	22,6	1,62	28,5	87,4	12,9	44,9
0,82	63,0	48,3	25,3	22,6	1,64	28,3	89,1	12,8	45,8
0,83	61,5	48,3	24,7	22,6	1,66	28,2	90,8	12,8	46,7
0,84	60,0	48,2	24,0	22,6	1,68	28,1	92,5	12,8	47,6
0,85	58,5	48,2	23,5	22,6	1,70	28,0	94,3	12,7	48,5
0,86	57,3	48,3	23,0	22,7	1,72	27,8	96,2	12,7	49,5
0,87	56,1	48,3	22,5	22,7	1,74	27,7	98,1	12,7	50,5
0,88	54,9	48,4	22,0	22,8	1,76	27,6	100,0	12,7	51,5
0,89	53,7	48,4	21,6	22,8	1,78	27,5	101,9	12,6	52,6
0,90	52,5	48,5	21,1	22,8	1,80	27,4	103,7	12,6	53,7
0,91	51,5	48,7	20,7	22,9	1,82	27,3	105,0	12,5	54,9
0,92	50,6	48,9	20,4	23,0	1,84	27,2	107,7	12,5	56,1
0,93	49,7	49,0	20,0	23,1	1,86	27,1	109,7	12,5	57,3
0,94	48,8	49,2	19,7	23,2	1,88	27,0	111,7	12,5	58,5
0,95	47,9	49,4	19,4	23,3	1,90	26,9	113,7	12,5	59,8
0,96	47,1	49,6	19,1	23,5	1,92	26,8	115,9	12,4	61,1
0,97	46,3	49,9	18,8	23,6	1,94	26,7	118,1	12,4	62,5
0,98	45,6	50,1	18,5	23,8	1,96	26,6	120,2	12,4	63,9
0,99	44,9	50,4	18,2	23,9	1,98	26,5	122,3	12,4	65,3
1,00	44,2	50,6	18,0	24,0	2,00	26,5	124,4	12,4	66,7

Fonte: Araújo 2011.

Tabela 11 - Tabela de Coeficientes de Marcus - Lajes do tipo 6.

l_y/l_x	m_x	m_y	n_x	n_y	l_y/l_x	m_x	m_y	n_x	n_y
1,00	55,7	55,7	24,0	24,0	1,50	32,0	72,2	14,4	32,3
1,01	54,8	55,8	23,6	24,0	1,51	31,9	72,8	14,3	32,6
1,02	53,9	55,9	23,1	24,0	1,52	31,7	73,4	14,3	32,9
1,03	53,0	55,9	22,7	24,1	1,53	31,6	74,0	14,2	33,2
1,04	52,1	56,0	22,3	24,1	1,54	31,4	74,6	14,2	33,6
1,05	51,2	56,1	21,9	24,2	1,55	31,3	75,2	14,1	33,9
1,06	50,3	56,2	21,7	24,2	1,56	31,1	75,8	14,0	34,2
1,07	49,4	56,3	21,2	24,3	1,57	31,0	76,4	14,0	34,5
1,08	48,5	56,4	20,9	24,3	1,58	30,8	77,0	14,0	34,9
1,09	47,6	56,5	20,5	24,4	1,59	30,6	77,6	13,9	35,2
1,10	46,8	56,6	20,2	24,4	1,60	30,5	78,2	13,8	35,5
1,11	46,2	56,8	20,0	24,5	1,61	30,4	78,8	13,8	35,8
1,12	45,6	57,0	19,7	24,6	1,62	30,3	79,5	13,7	36,1
1,13	45,0	57,3	19,4	24,7	1,63	30,2	80,2	13,7	36,5
1,14	44,4	57,5	19,2	24,8	1,64	30,1	80,8	13,7	36,8
1,15	43,8	57,7	18,9	25,0	1,65	30,0	81,5	13,6	37,1
1,16	43,2	58,0	18,7	25,1	1,66	29,9	82,2	13,6	37,5
1,17	42,6	58,2	18,4	25,2	1,67	29,8	82,8	13,6	37,8
1,18	42,0	58,4	18,2	25,3	1,68	29,7	83,5	13,5	38,1
1,19	41,4	58,7	18,0	25,4	1,69	29,6	84,2	13,5	38,5
1,20	40,9	58,9	17,8	25,6	1,70	29,4	84,9	13,5	38,8
1,21	40,5	59,2	17,6	25,7	1,71	29,3	85,6	13,4	39,1
1,22	40,1	59,6	17,4	25,9	1,72	29,2	86,4	13,4	39,5
1,23	39,7	59,9	17,3	26,0	1,73	29,1	87,1	13,4	39,9
1,24	39,3	60,3	17,1	26,2	1,74	29,0	87,9	13,3	40,2
1,25	38,9	60,6	16,9	26,4	1,75	29,0	88,6	13,3	40,6
1,26	38,5	61,0	16,8	26,6	1,76	28,9	89,4	13,3	41,0
1,27	38,1	61,3	16,6	26,8	1,77	28,8	90,1	13,2	41,3
1,28	37,7	61,7	16,5	27,0	1,78	28,7	90,9	13,2	41,7
1,29	37,3	62,0	16,4	27,2	1,79	28,6	91,6	13,2	42,1
1,30	36,9	62,4	16,2	27,4	1,80	28,5	92,5	13,1	42,5
1,31	36,6	62,8	16,1	27,6	1,81	28,4	93,2	13,1	42,9
1,32	36,3	63,3	16,0	27,8	1,82	28,3	94,0	13,1	43,3
1,33	36,0	63,7	15,9	28,0	1,83	28,2	94,7	13,1	43,8
1,34	35,7	64,2	15,8	28,3	1,84	28,1	95,5	13,0	44,2
1,35	35,5	64,6	15,6	28,5	1,85	28,0	96,2	13,0	44,6
1,36	35,2	65,0	15,5	28,7	1,86	28,0	97,0	13,0	45,1
1,37	34,9	65,5	15,4	29,0	1,87	27,9	97,7	13,0	45,5
1,38	34,6	65,9	15,3	29,3	1,88	27,8	98,5	13,0	45,9
1,39	34,3	66,4	15,2	29,5	1,89	27,7	99,2	12,9	46,4
1,40	34,1	66,8	15,1	29,7	1,90	27,7	100,0	12,9	46,8
1,41	33,9	67,3	15,0	30,0	1,91	27,6	100,9	12,9	47,2
1,42	33,7	67,9	15,0	30,2	1,92	27,6	101,8	12,9	47,6
1,43	33,5	68,4	14,9	30,5	1,93	27,5	102,7	12,9	48,0
1,44	33,3	69,0	14,8	30,7	1,94	27,5	103,6	12,8	48,4
1,45	33,1	69,5	14,8	31,0	1,95	27,5	104,5	12,8	48,8
1,46	32,9	70,0	14,7	31,3	1,96	27,4	105,4	12,8	49,2
1,47	32,7	70,6	14,6	31,5	1,97	27,4	106,3	12,8	49,6
1,48	32,5	71,1	14,	31,8	1,98	27,3	107,3	12,8	50,0
1,49	32,0	71,7	14,5	32,0	1,99	27,3	108,1	12,8	50,4
1,50	32,0	72,2	14,4	32,3	2,00	27,3	109,1	12,7	50,8

Fonte: Rodrigues 2011.

2.6.3 Teoria de Czerny

Segundo Silva et al. (2003, p.60) os cálculos de lajes eram feitos com o auxílio de tabelas como as de Czerny, de forma simplificada, considerando as lajes como elementos isolados sobre vigas indeformáveis. Eram analisados apenas esforços de momentos fletores e esforços cortantes, além do controle de flecha. Alguns conceitos do cálculo de Czerny:

- Não são levadas em consideração, a rigidez e a torção das lajes, no cálculo dos momentos fletores e deslocamentos pelas Tabelas de Czerny.
- Simplifica-se a análise da estrutura considerando as lajes como painéis isolados, apoiados em vigas indeformáveis.
- Como na teoria de Marcus, as tabelas são utilizadas de acordo com as condições de contorno e carga de cada estrutura.
- As Tabelas de Czerny determinam momentos fletores isolados em bordas que são contínuas em um painel de lajes. Logo, deve-se compatibilizar os momentos gerados segundo a metodologia de Czerny.
- A compatibilização dos momentos negativos obedece ao prescrito na norma 6118, conforme citado anteriormente.
- Para a correção dos momentos negativos soma-se o momento positivo da laje em questão a metade da diferença entre o momento negativo e o momento negativo corrigido da laje na direção que está sendo calculado. Tal correção somente será realizada se o momento sofrer acréscimo, do contrário permanece o calculado inicialmente.

O método de Cálculo de Czerny, baseia-se na teoria da elasticidade, porém, considera-se o coeficiente de Poisson (ν), com valor igual a 0. Conforme se prescreve na NBR 6118, para o cálculo dos momentos de engastamento, estes independem do coeficiente de Poisson, porém os momentos positivos variam de acordo com o valor do coeficiente de Poisson. Sendo assim, devem-se corrigir os valores dos momentos positivos obtidos pelas tabelas de Czerny com $\nu = 0$ para $\nu = 0,2$.

No método de Czerny são definidos os momentos positivos e negativos, na forma seguinte:

Eq. 24

$$m_x = \frac{p \cdot l^2}{\alpha_x}$$

Eq. 25

$$m_y = \frac{p \cdot l^2}{\alpha_y}$$

Eq. 26

$$m_x = \frac{p \cdot l^2}{\beta_x}$$

Eq. 27

$$m_y = \frac{p \cdot l^2}{\beta_y}$$

Onde:

m_x e m_y = momento fletor positivo nas direções x e y (kN.m/m);

m_x e m_y = momento fletor negativo nas direções x e y (kN.m/m);

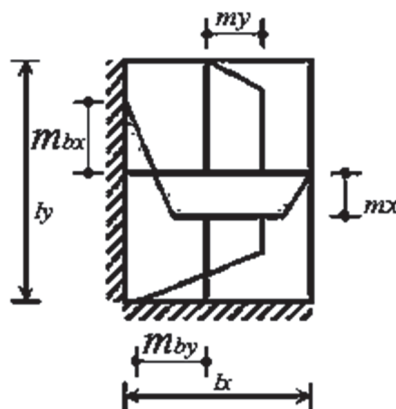
p = carga total uniformemente distribuída (kN/m²);

α_x e α_y = coeficientes para cálculo dos momentos fletores positivos atuantes nas direções paralelas a l_x e l_y , respectivamente.

β_x e β_y = coeficientes para cálculo dos momentos fletores negativos atuantes nas direções paralelas a l_x e l_y , respectivamente.

l_x = menor vão da laje (m).

Figura 33- Notação da solução de Czerny.



Fonte: Marino, 2006, p.8.

Tabela 12 - Tabela de Czerny para Cálculo dos Momentos Máximos - Lajes tipo 1. 2A e 3A.

l_y/l_x	Caso 1		Caso 2A			Caso 2B		
	α_x	α_y	α_x	α_y	β_y	α_x	α_y	β_x
1,00	22,70	22,70	32,40	26,50	11,90	26,50	32,40	11,90
1,05	20,80	22,50	29,20	25,00	11,30	25,70	33,30	11,30
1,10	19,30	22,30	26,10	24,40	10,90	24,40	33,90	10,90
1,15	18,10	22,30	23,70	23,90	10,40	23,30	34,50	10,50
1,20	16,90	22,30	22,00	23,80	10,10	22,30	34,90	10,20
1,25	15,90	22,40	20,20	23,60	9,80	21,40	35,20	9,90
1,30	15,20	22,70	19,00	23,70	9,60	20,70	35,40	9,70
1,35	14,40	22,90	17,80	23,70	9,30	20,10	37,80	9,40
1,40	13,80	23,10	16,80	23,80	9,20	19,70	39,90	9,30
1,45	13,20	23,30	15,80	23,90	9,00	19,20	41,10	9,10
1,50	12,70	23,50	15,10	24,00	8,90	18,80	42,50	9,00
1,55	12,30	23,50	14,30	24,00	8,80	18,30	42,50	8,90
1,60	11,90	23,50	13,80	24,00	8,70	17,80	42,50	8,80
1,65	11,50	23,50	13,20	24,00	8,60	17,50	42,50	8,70
1,70	11,20	23,50	12,80	24,00	8,50	17,20	42,50	8,60
1,75	10,80	23,50	12,30	24,00	8,45	17,00	42,50	8,50
1,80	10,70	23,50	12,00	24,00	8,40	16,80	42,50	8,40
1,85	10,40	23,50	11,50	24,00	8,35	16,50	42,50	8,30
1,90	10,20	23,50	11,30	24,00	8,30	16,40	42,50	8,30
1,95	10,10	23,50	10,90	24,00	8,25	16,30	42,50	8,30
2,00	9,90	23,50	10,80	24,00	8,20	16,20	42,50	8,30
> 2,00	8,00	23,50	8,00	24,00	8,00	14,20	42,50	8,00

Fonte: Beton-Kalender, 1976.

Tabela 13 - Tabela de Czerny para Cálculo dos Momentos Máximos - Lajes tipo 3. 4A e 4B.

l_y/l_x	CASO 3				CASO 4A			CASO 4B		
	α_x	α_y	β_x	β_y	α_x	α_y	β_y	α_x	α_y	β_x
1,00	34,50	34,50	14,30	14,30	46,10	31,60	14,30	31,60	46,10	14,30
1,05	32,10	33,70	13,30	13,80	39,90	29,80	13,40	29,90	46,40	13,80
1,10	30,10	33,90	12,70	13,60	36,00	28,80	12,70	29,00	47,20	13,50
1,15	28,00	33,90	12,00	13,30	31,90	27,70	12,00	28,00	47,70	13,20
1,20	26,40	34,00	11,50	13,10	29,00	26,90	11,50	27,20	48,10	13,00
1,25	24,90	34,40	11,10	12,90	26,20	26,10	11,10	26,40	48,20	12,70
1,30	23,80	35,00	10,70	12,80	24,10	25,60	10,70	25,80	48,10	12,60
1,35	23,00	36,60	10,30	12,70	22,10	25,10	10,30	25,30	47,90	12,40
1,40	22,20	37,80	10,00	12,60	20,60	24,80	10,00	24,80	47,80	12,30
1,45	21,40	39,10	9,80	12,50	19,30	24,60	9,75	24,40	47,70	12,20
1,50	20,70	40,20	9,60	12,40	18,10	24,40	9,50	24,20	47,60	12,20
1,55	20,20	40,20	9,40	12,30	17,00	24,30	9,30	24,00	47,60	12,10
1,60	19,70	40,20	9,20	12,30	16,20	24,30	9,20	24,00	47,60	12,00
1,65	19,20	40,20	9,10	12,20	15,40	24,30	9,05	24,00	47,60	12,00
1,70	18,80	40,20	8,90	12,20	14,70	24,30	8,90	24,00	47,40	12,00
1,75	18,40	40,20	8,80	12,20	14,00	24,30	8,80	24,00	47,30	12,00
1,80	18,10	40,20	8,70	12,20	13,50	24,30	8,70	24,00	47,20	12,00
1,85	17,80	40,20	8,60	12,20	13,00	24,30	8,60	24,00	47,10	12,00
1,90	17,50	40,20	8,50	12,20	12,60	24,30	8,50	24,00	47,10	12,00
1,95	17,20	40,20	8,40	12,20	12,10	24,30	8,40	24,00	47,10	12,00
2,00	17,10	40,20	8,40	12,20	11,80	24,30	8,40	24,00	47,00	12,00
> 2,00	14,20	40,20	8,00	12,00	8,00	24,30	8,00	24,00	47,00	12,00

Fonte: Beton-Kalender, 1976.

Tabela 14 - Tabela de Czerny para Cálculo dos Momentos Máximos - Lajes tipo 5A e 5B.

l_y/l_x	Caso 5A				Caso 5B			
	α_x	α_y	β_x	β_y	α_x	α_y	β_x	β_y
1,00	44,60	38,10	18,30	16,20	38,10	44,60	16,20	18,30
1,05	41,70	37,30	16,60	15,40	35,50	44,80	15,30	17,90
1,10	38,10	36,70	15,40	14,80	33,70	45,70	14,80	17,70
1,15	34,90	36,40	14,40	14,30	32,00	47,10	14,20	17,60
1,20	32,10	36,20	13,50	13,90	30,70	47,60	13,90	17,50
1,25	29,80	36,10	12,70	13,50	29,50	47,70	13,50	17,50
1,30	28,00	36,20	12,20	13,30	28,40	47,70	13,20	17,50
1,35	26,40	36,60	11,60	13,10	27,60	47,90	12,90	17,50
1,40	25,20	37,00	11,20	13,00	26,80	48,10	12,70	17,50
1,45	24,00	37,50	10,90	12,80	26,20	48,30	12,60	17,50
1,50	23,10	38,30	10,60	12,70	25,70	48,70	12,50	17,50
1,55	22,30	39,30	10,30	12,60	25,20	49,00	12,40	17,50
1,60	21,70	40,30	10,10	12,60	24,80	49,40	12,30	17,50
1,65	21,10	41,40	9,90	12,50	24,50	49,80	12,20	17,50
1,70	20,40	42,70	9,70	12,50	24,20	50,20	12,20	17,50
1,75	20,00	43,80	9,50	12,40	24,00	50,70	12,10	17,50
1,80	19,50	44,80	9,40	12,40	24,00	51,30	12,10	17,50
1,85	19,10	45,90	9,20	12,30	24,00	52,00	12,00	17,50
1,90	18,70	46,70	9,00	12,30	24,00	52,60	12,00	17,50
1,95	18,40	47,70	8,90	12,30	24,00	53,40	12,00	17,50
2,00	18,00	48,60	8,80	12,30	24,00	54,10	12,00	17,50
> 2,00	14,20	48,60	8,00	12,00	24,00	54,00	12,00	17,50

Fonte: Beton-Kalender, 1976.

Tabela 15 - Tabela de Czerny para Cálculo dos Momentos Máximos - Lajes tipo 6.

l_y/l_x	Caso 6			
	α_x	α_y	β_x	β_y
1,00	47,30	47,30	19,40	19,40
1,05	43,10	47,30	18,20	18,80
1,10	40,00	47,80	17,10	18,40
1,15	37,30	48,30	16,30	18,10
1,20	35,20	49,30	15,50	17,90
1,25	33,40	50,50	14,90	17,70
1,30	31,80	51,70	14,50	17,60
1,35	30,70	53,30	14,00	17,50
1,40	29,60	54,80	13,70	17,50
1,45	28,60	56,40	13,40	17,50
1,50	27,80	57,30	13,20	17,50
1,55	27,20	57,60	13,00	17,50
1,60	26,60	57,80	12,80	17,50
1,65	26,10	57,90	12,70	17,50
1,70	25,50	57,80	12,50	17,50
1,75	25,10	57,70	12,40	17,50
1,80	24,80	57,60	12,30	17,50
1,85	24,50	57,50	12,20	17,50
1,90	24,20	57,40	12,10	17,50
1,95	24,00	57,20	12,00	17,50
2,00	24,00	57,10	12,00	17,50
> 2,00	24,00	57,00	12,00	17,50

Fonte: Beton-Kalender, 1976.

2.6.4 Método de Bares

As tabelas de Bares a exemplo de Czerny para efeito de cálculo devem ser adaptadas com o coeficiente de Poisson = 0,20. As equações de Bares (1972), desenvolvem soluções em séries para placas com as variadas vinculações e relação entre os lados da placa. Os coeficientes são tabelados e dispensam a resolução das equações diferenciais. Alguns conceitos dos cálculos de Bares:

- apenas o deslocamento máximo;
- as placas são retangulares, então para resolver placas irregulares é necessário empregar outro método ou, em certos casos, fazer uso de aproximações;
- considera que o apoio seja perfeitamente engastado ou rotulado;
- não é fornecido o diagrama exato de momentos fletores negativos, então as armaduras são estendidas até um comprimento preestabelecido, que não representa o

comprimento necessário, mas que foi calibrado para considerar a mais desfavorável das combinações de vinculações;

e) não considera que a fissuração reduz a rigidez, então subestima os deslocamentos;

f) algumas disposições estruturais induzem esforços importantes, que a solução encontrada pelo uso das Tabelas de Bares não identifica, como por exemplo, pilar muito rígido situado na metade das vigas que servem de apoio para uma laje;

g) a consideração de apoio rígido é uma aproximação da realidade, deste modo pode-se afirmar que as lajes apresentam resultados tão mais próximos das tabelas, quanto mais rígidos são os apoios. Comumente verifica-se que, devido ao fato de haver apoios deslocáveis, os momentos fletores positivos e as flechas tendem a serem maiores que aqueles obtidos pelo uso das Tabelas de Bares e os momentos fletores negativos, a ser menores;

h) considera que as placas possuem condição de contorno indeslocável na vertical. (DAL PRÁ - Análise de alternativas de projeto para pavimentos sem vigas em concreto armado, 2012, p. 39).

Para o cálculo de momentos máximos positivos por unidade de comprimento nas direções x e y, são usuais no método de Bares as seguintes equações:

$$m_x = \mu_x \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad e, \quad m_y = \mu_y \frac{p \cdot l_y^2}{100} \quad \text{Eq. 28}$$

Momentos máximos negativos;

$$x_x = \mu'_x \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad e, \quad x_y = \mu'_y \frac{p \cdot l_y^2}{100} \quad \text{Eq. 29}$$

Considera-se:

L_x = o menor lado da placa;

$\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$ = Coeficientes de Bares, fixados em tabelas.

As tabelas apresentadas a seguir já possuem adaptadas para o coeficiente de Poisson $\nu=0,2$, por Libânio Miranda Pinheiro¹²

¹² Doutor em Engenharia, 1988, Coordenador de Grupo de Pesquisa do CNPq, sobre Estruturas de Concreto, até 2010. Atualmente desenvolve pesquisas relacionadas, principalmente, com os seguintes temas: concreto armado, concreto leve com EPS, estruturas de edifícios e lajes e paredes de concreto pré-moldado. Fonte: Conselho Nacional de desenvolvimento científico e tecnológico, CNPQ, <<http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?metodo=apresentar&id=K4783885Y6>>, Acesso em 13 de junho de 2016. 13,15hs

Tabela 16 - Tabela de coeficientes de Bares corrigidos - lajes do tipo 1, 2A e 2B.

l_y/l_x	1		2A			2B		
	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y
1,00	4,23	4,23	2,91	3,54	8,40	3,54	8,40	2,91
1,05	4,62	4,25	3,26	3,64	8,79	3,77	8,79	2,84
1,10	5,00	4,27	3,61	3,74	9,18	3,99	9,17	2,76
1,15	5,38	4,25	3,98	3,80	9,53	4,19	9,49	2,68
1,20	5,75	4,22	4,35	3,86	9,88	4,38	9,80	2,59
1,25	6,10	4,17	4,72	3,89	10,16	4,55	10,06	2,51
1,30	6,44	4,12	5,09	3,92	10,41	4,71	10,32	2,42
1,35	6,77	4,06	5,44	3,93	10,64	4,86	10,54	2,34
1,40	7,10	4,00	5,79	3,94	10,86	5,00	10,75	2,25
1,45	7,41	3,95	6,12	3,91	11,05	5,12	10,92	2,19
1,50	7,72	3,89	6,45	3,88	11,23	5,24	11,09	2,12
1,55	7,99	3,82	6,76	3,85	11,39	5,34	11,23	2,04
1,60	8,26	3,74	7,07	3,81	11,55	5,44	11,36	1,95
1,65	8,50	3,66	7,28	3,78	11,67	5,53	11,48	1,87
1,70	8,74	3,58	7,49	3,74	11,79	5,61	11,60	1,79
1,75	8,95	3,53	7,53	3,69	11,88	5,68	11,72	1,74
1,80	9,16	3,47	7,56	3,63	11,96	5,75	11,84	1,68
1,85	9,35	3,38	8,10	3,58	12,05	5,81	11,94	1,67
1,90	9,54	3,29	8,63	3,53	12,14	5,86	12,03	1,59
1,95	9,73	3,23	8,86	3,45	12,17	5,90	12,08	1,54
2,00	9,91	3,16	9,08	3,36	12,20	5,94	12,13	1,48
> 2,00	12,50	3,16	12,50	3,36	12,20	7,03	12,50	1,48

Fonte: Pinheiro, 1993.

Tabela 17 - Tabela de coeficientes de Bares corrigidos - lajes do tipo 3, 4A e 4B.

l_y/l_x	3				4A			4B		
	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y
1,00	2,69	6,99	2,69	6,99	2,01	3,09	6,99	3,09	6,99	2,01
1,05	2,94	7,43	2,68	7,18	2,32	3,23	7,43	3,22	7,20	1,92
1,10	3,19	7,87	2,67	7,36	2,63	3,36	7,87	3,35	7,41	1,83
1,15	3,42	8,28	2,65	7,50	2,93	3,46	8,26	3,46	7,56	1,73
1,20	3,65	8,69	2,62	7,63	3,22	3,56	8,65	3,57	7,70	1,63
1,25	3,86	9,03	2,56	7,72	3,63	3,64	9,03	3,66	7,82	1,56
1,30	4,06	9,37	2,50	7,81	3,99	3,72	9,33	3,74	7,93	1,49
1,35	4,24	9,65	2,45	7,88	4,34	3,77	9,69	3,80	8,02	1,41
1,40	4,42	9,93	2,39	7,94	4,69	3,82	10,00	3,86	8,11	1,33
1,45	4,58	10,17	2,32	8,00	5,03	3,86	10,25	3,91	8,13	1,26
1,50	4,73	10,41	2,25	8,06	5,37	3,90	10,49	3,96	8,15	1,19
1,55	4,86	10,62	2,16	8,09	5,70	3,90	10,70	4,00	8,20	1,14
1,60	4,99	10,82	2,07	8,12	6,03	3,89	10,91	4,04	8,25	1,08
1,65	5,10	10,99	1,99	8,14	6,35	3,85	11,08	4,07	8,28	1,03
1,70	5,21	11,16	1,91	8,15	6,67	3,81	11,24	4,10	8,30	0,98
1,75	5,31	11,30	1,85	8,16	6,97	3,79	11,39	4,12	8,31	0,95
1,80	5,40	11,43	1,78	8,17	7,27	3,76	11,53	4,14	8,32	0,91
1,85	5,48	11,55	1,72	8,17	7,55	3,72	11,65	4,15	8,33	0,87
1,90	5,56	11,67	1,66	8,18	7,82	3,67	11,77	4,16	8,33	0,83
1,95	5,63	11,78	1,63	8,19	8,09	3,60	11,83	4,16	8,33	0,80
2,00	5,70	11,89	1,60	8,20	8,35	3,52	11,88	4,17	8,33	0,76
> 2,00	7,03	12,50	1,60	8,20	12,50	3,52	11,88	4,17	8,33	0,76

Fonte: Pinheiro, 1993.

Tabela 18 - Tabela de coeficientes de Bares corrigidos - Lajes tipo 5A, 5B e 6.

l_y/l_x	5A				5B				6			
	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y
1,00	2,02	5,46	2,52	6,17	2,52	6,17	2,02	5,46	2,02	5,15	2,02	5,15
1,05	2,27	5,98	2,56	6,46	2,70	6,47	1,97	5,56	2,22	5,50	2,00	5,29
1,10	2,52	6,50	2,60	6,75	2,87	6,76	1,91	5,65	2,42	5,85	1,98	5,43
1,15	2,76	7,11	2,63	6,97	3,02	6,99	1,84	5,70	2,65	6,14	1,94	5,51
1,20	3,00	7,72	2,65	7,19	3,16	7,22	1,77	5,75	2,87	6,43	1,89	5,59
1,25	3,23	8,81	2,64	7,36	3,28	7,40	1,70	5,75	2,97	6,67	1,83	5,64
1,30	3,45	8,59	2,61	7,51	3,40	7,57	1,62	5,76	3,06	6,90	1,77	5,68
1,35	3,66	8,74	2,57	7,63	3,50	7,70	1,55	5,75	3,19	7,09	1,71	5,69
1,40	3,86	8,88	2,53	7,74	3,59	7,82	1,47	5,74	3,32	7,28	1,65	5,70
1,45	4,05	9,16	2,48	7,83	3,67	7,91	1,41	5,73	3,43	7,43	1,57	5,71
1,50	4,23	9,44	2,43	7,91	3,74	8,00	1,35	5,72	3,53	7,57	1,49	5,72
1,55	4,39	9,68	2,39	7,98	3,80	8,07	1,29	5,69	3,61	7,68	1,43	5,72
1,60	4,55	9,91	2,34	8,02	3,86	8,14	1,23	5,66	3,69	7,79	1,36	5,72
1,65	4,70	10,13	2,28	8,03	3,91	8,20	1,18	5,62	3,76	7,88	1,29	5,72
1,70	4,84	10,34	2,22	8,10	3,95	8,25	1,13	5,58	3,83	7,97	1,21	5,72
1,75	4,97	10,53	2,15	8,13	3,99	8,30	1,07	5,56	3,88	8,05	1,17	5,72
1,80	5,10	10,71	2,08	8,17	4,02	8,34	1,00	5,54	3,92	8,12	1,13	5,72
1,85	5,20	10,88	2,02	8,16	4,05	8,38	0,97	5,55	3,96	8,18	1,07	5,72
1,90	5,30	11,04	1,96	8,14	4,08	8,42	0,94	5,56	3,99	8,24	1,01	5,72
1,95	5,40	11,20	1,88	8,13	4,10	8,45	0,91	5,60	4,02	8,29	0,99	5,72
2,00	5,50	11,35	1,80	8,12	4,12	8,47	0,88	5,64	4,05	8,33	0,96	5,72
> 2,00	7,03	12,50	1,80	8,12	4,17	8,33	0,88	5,64	4,17	8,33	0,96	5,72

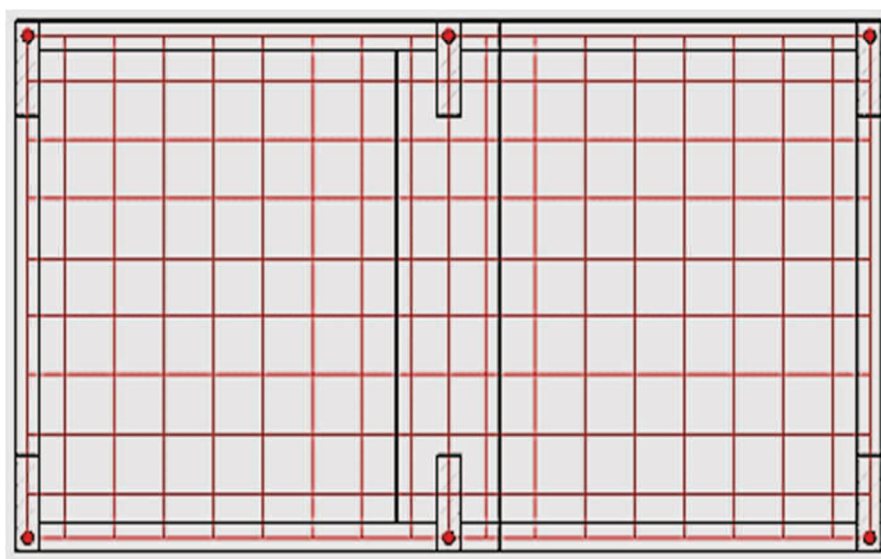
Fonte: Pinheiro, 1993.

Outras condições de bordo, são propostas por Pinheiro, no entanto estas não serão enfatizadas neste trabalho.

2.6.5 Método da Analogia de Grelha

O processo de cálculo pela Analogia de Grelhas, baseia-se na substituição de um pavimento por uma grelha equivalente, onde os elementos da mesma (barras da grelha equivalente) passam a representar os elementos estruturais do pavimento (lajes e vigas), este processo permite reproduzir o comportamento estrutural de pavimentos com praticamente qualquer geometria, ou tipologia das lajes. A análise consiste em dividir as lajes que o compõem em um número adequado de faixas, as quais terão larguras dependentes da geometria e das dimensões do pavimento.

Figura 34- Laje em uma malha de grelha plana.



Fonte:¹³

Deve-se considerar a rigidez a torção no dimensionamento pela analogia de grelhas, logo, deve-se, portanto, estudar a influência desse parâmetro e determinar qual o valor a ser adotado em função dos resultados que se deseja obter. Os valores adotados poderão resultar em valores muito próximos dos conquistados pela teoria da elasticidade.

Carvalho & Figueiredo Filho (2004), especifica para a rigidez a torção (I_t), no estágio I, o dobro da rigidez à flexão (I_f). Assim ficam definidos.

¹³ AltoQi, Disponível em: <<http://www.altoqi.com.br/software/projeto-estrutural/eberick-v10/modulos/lajes>> Acesso em 05 de junho de 2016, 13:35hs.

Eq. 30

$$I_f = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Sendo:

Eq. 31

$$I_t = 2 \cdot I_f$$

Considerando-se a placa trabalhando com mesa em viga (seção T), desconsidera-se então a contribuição da laje para os esforços resultando os trabalhos fornecidos como elementos em viga para o estágio I, em:

Eq. 32

$$I_t = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Logo, para o estágio II, deve-se adotar considerando os mesmos critérios da equação 33:

Eq. 33

$$I_t = \frac{b \cdot h^3}{30}$$

Os valores do módulo de deformação longitudinal à compressão do concreto (E_c), do módulo de deformação transversal do concreto (G_c), e do coeficiente de Poisson (ν) relativo às deformações elásticas podem ser determinados a partir das recomendações da NBR 6118.

3 METODOLOGIA

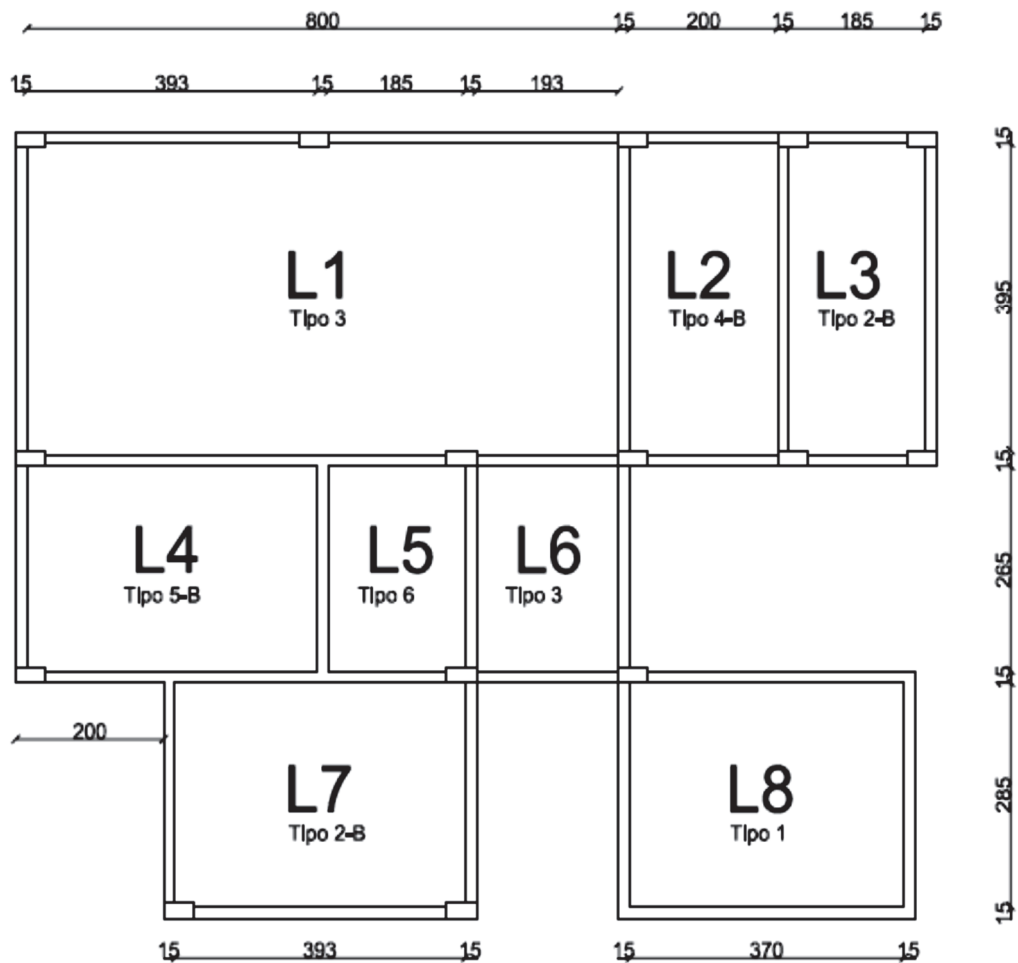
Os itens citados na revisão bibliográfica, foram sincretizados de maneira gradual, procurando proporcionar uma dimensão completa do complexo entendimento sobre os fatores que levarão à conclusão deste estudo. O estudo tem por objetivo, verificar se é significativo a discrepância de dados conforme o método de cálculo para dimensionamento de lajes e a comparação de resultados a outros já realizados. Será formulado uma planta de laje, especificando tipos que melhores se adequem para que haja maior abrangência possível na disposição dos conceitos engastamento e direção dos momentos. Este trabalho sustenta-se em pesquisa bibliográfica sobre artigos e publicações de outros trabalhos por intermédio da internet, sendo dissertações, apostilas de disciplina, e auxílio das tabelas de cálculo. Será então efetuado cálculo conforme o Método de Marcus, de Czerny, de Bares e pela analogia de grelha,

este através do AltoQi Eberick V8, onde apresentar-se-á tabelas comparativas finais para assim considerar o resultado de outros estudos, onde finalmente propor-se-á a justificação dos resultados obtidos.

3.1 OBJETO DE ESTUDO

Para abranger a maior dimensão possível dos tipos de engastamento formulou-se o Croqui da figura abaixo, no qual a mesma comporta as lajes de tipologias 1, 2B, 3, 4B, 5B e 6. O engastamento destas lajes está demonstrado na figura 20, em 1.3.1.3, classificação das lajes quanto aos tipos de apoio.

Figura 35 -Estrutura a ser dimensionada.

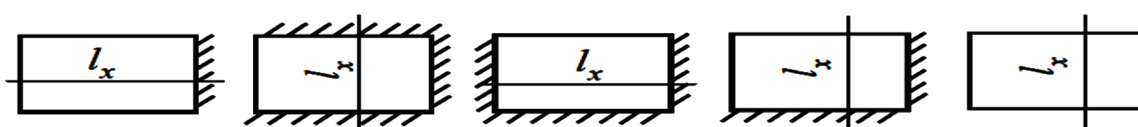


Fonte: Próprio autor.

4 DIMENSIONAMENTO

Para prosseguir com os cálculos os valores de l_x e l_y foram disponibilizados para o processo de Marcus, como sendo o valor de l_x o menor vão de cada banzo de laje para o caso de igualdade entre engastes, ou l_x na direção do maior número de engastes (Ver figura abaixo). Para o processo de cálculo de Czerny e Bares os valores de l_x devem ser adotados como sendo o menor lado do vão.

Figura 36 - Determinação dos lados para dimensionamento.



Fonte: Estruturas em concreto II, UFPA, 2006, p.14.

Definidos os lados adotados (l_x e l_y), prossegue-se com o cálculo de λ (Eq. 21). O valor de λ , define os coeficientes adimensionais a serem usados para o cálculo dos momentos nas lajes. Retirados das tabelas de Marcus, Czerny e Bares, estes apresentam-se nas tabelas deste trabalho já calculados conforme processo das equações 18, 19 e 20.

Logo procede-se o cálculo dos momentos segundo as equações 22 e 23, em Marcus; 24, 25, 26 e 27, em Czerny e 28 e 29 em Bares.

4.1 DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS

As tabelas utilizadas neste trabalho apresentam valores na ordem de duas casas decimais. Logo os resultados utilizados nos momentos fletores seguiu o mesmo exemplo, sem nenhum arredondamento de resultados para maior. Para a laje foram definidas as cargas de carregamentos permanentes (g) = 1,3kN/m² e acidentais (q) = 1,5kN/m² conforme as especificações da NBR 6120:1980 – Cargas para o cálculo de Estruturas de Edificações.

Para o peso específico do concreto foi considerado da classe C25, (25kN/m³), e espessura h das lajes de 10 cm. Assim a carga referente ao peso próprio do concreto é dado por:

Eq. 34

$$P_p = h \cdot \gamma \quad \blacktriangleright \quad P_p = 0,1m \cdot 25kN/m^3 \quad \blacktriangleright \quad P_p = 2,5kN/m^2$$

Assim considera-se o total das cargas permanentes (g):

Eq. 35

$$\text{Total}(g) = P_p + 1,3kN/m^2 \quad \blacktriangleright \quad \text{Total}(g) = 2,5kN/m^2 + 1,3kN/m^2 = 3,8kN/m^2.$$

Somando-se as cargas permanentes à carga acidental (q) de 1,5kN/m² obtemos o valor da carga total atuante na laje (P), para que seja feito o dimensionamento dos momentos gerados. Neste caso:

$$P = \text{Total}(g) + q \quad \blacktriangleright \quad P = 3,8 + 1,5 = 5,3kN/m^2.$$

Para o cálculo das determinações dos momentos fletores no Software Eberik, foram consideradas as configurações originais de instalação, as quais dão os resultados de dimensionamento em Kgf, sendo assim deve-se converter os resultados do dimensionamento simplificado para a mesma medida. O Instituto de pesos e medidas – IMPEM/SP, define que 1 kN possui a mesma grandeza 101,971 Kgf, no entanto para a facilitação dos cálculos deste trabalho adota-se a quantidade de 100 Kgf para 1kN. Esta é uma prática comum no dimensionamento estrutural por métodos simplificados na disciplina de Engenharia.

Figura 37 - Conversão de medidas IPPEM/SP.

Conversor de Unidades de Medição

FORÇA

Converter de: quilonewton [kN]

Para: quilograma força

Como utilizar o conversor

- para operações decimais use ponto e não vírgula;
- selecione a grandeza no menu à esquerda;
- no campo "Converter de" digite o valor numérico;
- selecione a unidade a ser convertida;
- selecione a unidade para a qual se quer convertê-la;
- o resultado aparecerá automaticamente;

casas decimais

Se você desejar um resultado com número de casas diferente da que o conversor apresentou, digite a sua opção.

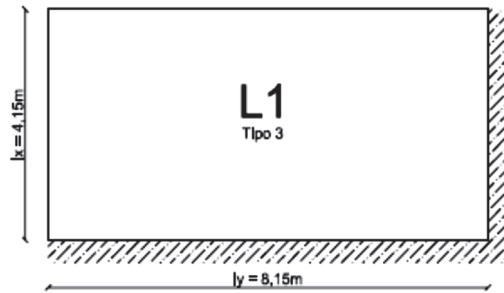
Fonte:¹⁴

¹⁴ Instituto de pesos e medidas de São Paulo. Disponível em: <<http://www.ipem.sp.gov.br/cv2/>>. Acesso em 09 de Junho de 2016, 08:22 hs.

4.1.1 Cálculo simplificado

Laje L1.

Figura 38 - Engastamento laje L1.



Fonte: Próprio autoíver.

Processo de Marcus:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{8,15}{4,15} = 1,96$$

Tabela 8, ($m_x = 17,1$; $m_y = 65,9$; $n_x = 8,5$; $n_y = 32,8$).

Momentos máximos positivos:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} \quad \blacktriangleright \quad M_x = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 4,15 \text{m}^2}{17,1} \quad \blacktriangleright \quad M_x = 5,33 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_x = 533 \text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} \quad \blacktriangleright \quad M_y = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 4,15 \text{m}^2}{65,9} \quad \blacktriangleright \quad M_y = 1,38 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_y = 138 \text{kgf} \cdot \text{m/m}.$$

Momentos máximos negativos:

$$M_{xe} = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_x} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -\frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 4,15 \text{m}^2}{8,5} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -10,73 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{xe} = -1073 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{ye} = -\frac{p \cdot lx^2}{n_y} \quad \blacktriangleright M_{ye} = -\frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 4,15\text{m}^2}{32,8} \quad \blacktriangleright M_{ye} = -2,78\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{ye} = -278\text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

Processo de Czerny:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \lambda = \frac{8,15}{4,15} = 1,96$$

Tabela 13, ($\alpha_x = 17,2$; $\alpha_y = 40,2$; $\beta_x = 8,4$; $\beta_y = 12,2$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \frac{p \cdot lx^2}{\alpha_x} \quad \blacktriangleright m_x = \frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 4,15\text{m}^2}{17,2} \quad \blacktriangleright m_x = 5,30\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_x = 530\text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = \frac{p \cdot lx^2}{\alpha_y} \quad \blacktriangleright m_y = \frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 4,15\text{m}^2}{40,2} \quad \blacktriangleright m_y = 2,27\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = 227\text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

Momentos máximos negativos:

$$m'_x = -\frac{p \cdot lx^2}{\beta_x} \quad \blacktriangleright m'_x = -\frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 4,15\text{m}^2}{8,4} \quad \blacktriangleright m'_x = -10,86\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m'_x = -1086\text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$m'_y = -\frac{p \cdot lx^2}{\beta_y} \quad \blacktriangleright m'_y = -\frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 4,15\text{m}^2}{12,2} \quad \blacktriangleright m'_y = -7,48\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m'_y = -748\text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

Processo de Bares:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \lambda = \frac{8,15}{4,15} = 1,96$$

Tabela 17, ($\mu_x = 5,63$; $\mu_y = 1,63$; $\mu'_x = 11,78$; $\mu'_y = 8,19$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \mu_x \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 5,63 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 4,15m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 5,13kN \cdot m/m$$

$$m_x = 513kgf \cdot m/m$$

$$m_y = \mu_y \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 1,63 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 4,15m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 1,48kN \cdot m/m$$

$$m_y = 148kgf \cdot m/m$$

Momentos máximos negativos:

$$x_x = -\mu'_x \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -11,78 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 4,15m^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -10,75kN \cdot m/m$$

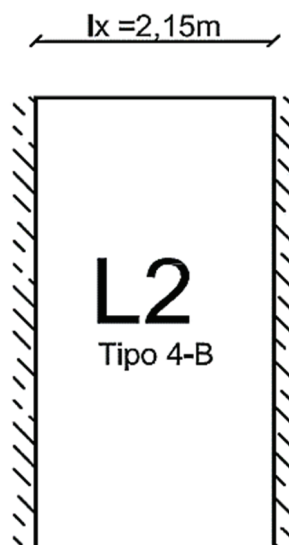
$$x_x = -1075kgf \cdot m/m$$

$$x_y = -\mu'_y \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright x_y = -8,19 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 4,15m^2}{100} \quad \blacktriangleright x_y = -7,47kN \cdot m/m$$

$$x_y = -747kgf \cdot m/m.$$

Laje L2.

Figura 39 - Engastamento laje l2.



Fonte: Próprio autor.

Processo de Marcus:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{4,15}{2,15} = 1,93$$

Tabela 9, ($m_x = 26,3$; $m_y = 159,7$; $n_x = 12,2$).

Momentos máximos positivos:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} \quad \blacktriangleright \quad M_x = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,15 \text{m}^2}{26,3} \quad \blacktriangleright \quad M_x = 0,931 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_x = 93,1 \text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} \quad \blacktriangleright \quad M_y = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,15 \text{m}^2}{159,7} \quad \blacktriangleright \quad M_y = 0,153 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_y = 15,3 \text{kgf} \cdot \text{m/m}.$$

Momento máximo negativo:

$$M_{xe} = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_x} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -\frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,15 \text{m}^2}{12,2} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -2,00 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{xe} = -200 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

Processo de Czerny:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{4,15}{2,15} = 1,93$$

Tabela 13, ($\alpha_x = 24$; $\alpha_y = 47,1$; $\beta_x = 12$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \frac{p \cdot l_x^2}{\alpha_x} \quad \blacktriangleright \quad m_x = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,15 \text{m}^2}{24} \quad \blacktriangleright \quad m_x = 1,02 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_x = 102 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = \frac{p \cdot l_x^2}{\alpha_y} \quad \blacktriangleright \quad m_y = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,15 \text{m}^2}{47,1} \quad \blacktriangleright \quad m_y = 0,52 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = 52 \text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

Momento máximo negativo:

$$m'_x = -\frac{p \cdot l_x^2}{\beta_x} \quad \blacktriangleright m'_x = -\frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,15m^2}{12} \quad \blacktriangleright m'_x = -2,04kN \cdot m/m$$

$$m'_x = -204kgf \cdot m/m.$$

Processo de Bares:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \lambda = \frac{4,15}{2,15} = 1,93$$

Tabela 17, ($\mu_x = 4,16$; $\mu_y = 10,80$; $\mu'_x = 2,04$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \mu_x \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 4,16 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,15m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 1,02kN \cdot$$

m/m

$$m_x = 102kgf \cdot m/m$$

$$m_y = \mu_y \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 10,80 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,15m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 0,19kN \cdot m/m$$

$$m_y = 19kgf \cdot m/m$$

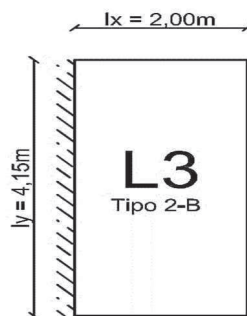
Momento máximo negativos:

$$x_x = -\mu'_x \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -1,33 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,15m^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -2,04kN \cdot m/m$$

$$x_x = -204kgf \cdot m/m.$$

Laje L3.

Figura 40 - Engastamento da laje L3.



Fonte: Próprio autor.

Processo de Marcus:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{4,15}{2,15} = 1,93$$

Tabela 7, ($m_x = 16,6$; $m_y = 83,2$; $n_x = 8,2$).

Momentos máximos positivos:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} \quad \blacktriangleright \quad M_x = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,15 \text{m}^2}{16,6} \quad \blacktriangleright \quad M_x = 1,47 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_x = 147 \text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} \quad \blacktriangleright \quad M_y = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,15 \text{m}^2}{83,2} \quad \blacktriangleright \quad M_y = 0,29 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_y = 29 \text{kgf} \cdot \text{m/m}.$$

Momento máximo negativo:

$$M_{xe} = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_x} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -\frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,15 \text{m}^2}{8,2} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -2,98 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{xe} = -298 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

Processo de Czerny:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{4,15}{2,15} = 1,93$$

Tabela 12, ($\alpha_x = 16,3$; $\alpha_y = 42,3$; $\beta_x = 8,3$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \frac{p \cdot l_x^2}{\alpha_x} \quad \blacktriangleright \quad m_x = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,15 \text{m}^2}{16,3} \quad \blacktriangleright \quad m_x = 1,50 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_x = 150 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = \frac{p \cdot l_x^2}{\alpha_y} \quad \blacktriangleright \quad m_y = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,15 \text{m}^2}{42,3} \quad \blacktriangleright \quad m_y = 0,579 \text{N} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = 57,9 \text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

Momento máximo negativo:

$$m'_x = -\frac{p \cdot lx^2}{\beta_x} \quad \blacktriangleright m'_x = -\frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,15m^2}{8,3} \quad \blacktriangleright m'_x = -2,95kN \cdot m/m$$

$$m'_x = -295kgf \cdot m/m.$$

Processo de Bares:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \lambda = \frac{4,15}{2,15} = 1,93$$

Tabela 16, ($\mu_x = 5,90$; $\mu_y = 1,54$; $\mu'_x = 12,08$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \mu_x \frac{p \cdot lx^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 5,90 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,15m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 1,44kN \cdot m/m$$

$$m_x = 144kgf \cdot m/m$$

$$m_y = \mu_y \frac{p \cdot lx^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 1,54 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,15m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 0,38kN \cdot m/m$$

$$m_y = 38kgf \cdot m/m$$

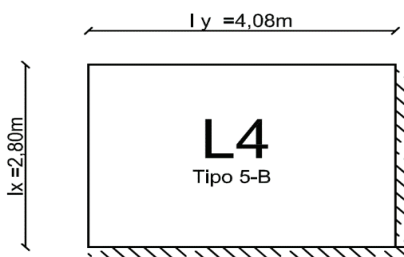
Momentos máximos negativos:

$$x_x = -\mu'_x \frac{p \cdot lx^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -12,08 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,15m^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -2,95kN \cdot m/m$$

$$x_x = -295kgf \cdot m/m.$$

Laje L4.

Figura 41 - Engastamento laje L4.



Fonte: Próprio autor.

Processo de Marcus:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{4,08}{2,80} = 1,45$$

Tabela 10, ($m_x = 30,1$; $m_y = 74,8$; $n_x = 13,3$; $n_y = 37,9$).

Momentos máximos positivos:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} \quad \blacktriangleright \quad M_x = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{30,1} \quad \blacktriangleright \quad M_x = 1,38 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_x = 138 \text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} \quad \blacktriangleright \quad M_y = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{74,8} \quad \blacktriangleright \quad M_y = 0,55 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_y = 55 \text{kgf} \cdot \text{m/m}.$$

Momentos máximos negativos:

$$M_{xe} = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_x} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -\frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{13,3} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -3,12 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{xe} = -312 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{ye} = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_y} \quad \blacktriangleright \quad M_{ye} = -\frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{37,9} \quad \blacktriangleright \quad M_{ye} = -1,09 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{ye} = -109 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

Processo de Czerny:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{4,08}{2,80} = 1,45$$

Tabela 14, ($\alpha_x = 26,2$; $\alpha_y = 48,3$; $\beta_x = 12,6$; $\beta_y = 17,5$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \frac{p \cdot l_x^2}{\alpha_x} \quad \blacktriangleright \quad m_x = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{26,2} \quad \blacktriangleright \quad m_x = 1,58 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_x = 158 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = \frac{p \cdot l_x^2}{\alpha_y} \quad \blacktriangleright \quad m_y = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{48,3} \quad \blacktriangleright \quad m_y = 0,86 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = 86 \text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

Momentos máximos negativos:

$$m'_x = -\frac{p \cdot l_x^2}{\beta_x} \quad \blacktriangleright \quad m'_x = -\frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{12,6} \quad \blacktriangleright \quad m'_x = -3,29 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m'_x = -329 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$m'_y = -\frac{p \cdot l_x^2}{\beta_y} \quad \blacktriangleright \quad m'_y = -\frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{17,5} \quad \blacktriangleright \quad m'_y = -2,37 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m'_y = -237 \text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

Processo de Bares:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{4,08}{2,80} = 1,45$$

Tabela 18, ($\mu_x = 3,67$; $\mu_y = 1,41$; $\mu'_x = 7,91$; $\mu'_y = 5,73$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \mu_x \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad m_x = 3,67 \frac{5,3 \text{kN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad m_x = 1,52 \text{kN} \cdot$$

m/m

$$m_x = 152 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = \mu_y \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad m_y = 1,41 \frac{5,3 \text{kN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad m_y = 0,58 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = 58 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

Momentos máximos negativos:

$$x_x = -\mu'_x \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad x_x = -7,91 \frac{5,3 \text{kN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad x_x = -3,28 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

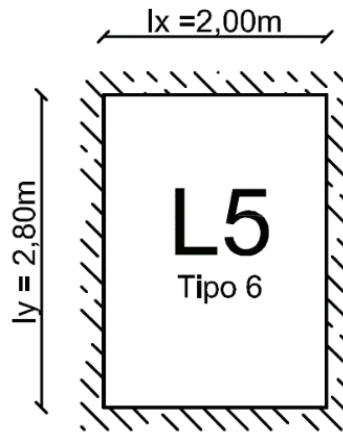
$$x_x = -328 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$x_y = -\mu'_y \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad x_y = -5,73 \frac{5,3 \text{kN/m}^2 \cdot 2,80 \text{m}^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad x_y = -2,38 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$x_y = -238 \text{kgf} \cdot \text{m}/\text{m}.$$

Laje L5.

Figura 42 - Engastamento da laje L5.



Fonte: Próprio autor.

Processo de Marcus:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{2,80}{2,00} = 1,40$$

Tabela 11, ($m_x = 34,1$; $m_y = 66,8$; $n_x = 15,1$; $n_y = 29,7$).

Momentos máximos positivos:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} \quad \blacktriangleright \quad M_x = \frac{5,3 \text{KN}/\text{m}^2 \cdot 2,00 \text{m}^2}{34,1} \quad \blacktriangleright \quad M_x = 0,62 \text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$$

$$M_x = 62 \text{kgf} \cdot \text{m}/\text{m};$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} \quad \blacktriangleright \quad M_y = \frac{5,3 \text{KN}/\text{m}^2 \cdot 2,00 \text{m}^2}{66,8} \quad \blacktriangleright \quad M_y = 0,31 \text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$$

$$M_y = 31 \text{kgf} \cdot \text{m}/\text{m}.$$

Momentos máximos negativos:

$$M_{xe} = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_x} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -\frac{5,3 \text{KN}/\text{m}^2 \cdot 2,00 \text{m}^2}{15,1} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -1,40 \text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$$

$$M_{xe} = -140 \text{kgf} \cdot \text{m}/\text{m}$$

$$M_{ye} = -\frac{p \cdot lx^2}{n_y} \quad \blacktriangleright M_{ye} = -\frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 2,00\text{m}^2}{29,7} \quad \blacktriangleright M_{ye} = -0,71\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{ye} = -71\text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

Processo de Czerny:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \lambda = \frac{2,80}{2,00} = 1,40$$

Tabela 15, ($\alpha_x = 29,6$; $\alpha_y = 54,8$; $\beta_x = 13,7$; $\beta_y = 17,5$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \frac{p \cdot lx^2}{\alpha_x} \quad \blacktriangleright m_x = \frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 2,00\text{m}^2}{29,6} \quad \blacktriangleright m_x = 0,71\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_x = 71\text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = \frac{p \cdot lx^2}{\alpha_y} \quad \blacktriangleright m_y = \frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 2,00\text{m}^2}{54,8} \quad \blacktriangleright m_y = 0,38\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = 38\text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

Momentos máximos negativos:

$$m'_x = -\frac{p \cdot lx^2}{\beta_x} \quad \blacktriangleright m'_x = -\frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 2,00\text{m}^2}{13,7} \quad \blacktriangleright m'_x = -1,54\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m'_x = -154\text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$m'_y = -\frac{p \cdot lx^2}{\beta_y} \quad \blacktriangleright m'_y = -\frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 2,00\text{m}^2}{17,5} \quad \blacktriangleright m'_y = -1,21\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m'_y = -121\text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

Processo de Bares:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \lambda = \frac{2,80}{2,00} = 1,40$$

Tabela 18, ($\mu_x = 3,32$; $\mu_y = 1,65$; $\mu'_x = 7,28$; $\mu'_y = 5,70$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \mu_x \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 3,32 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,00m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 0,70kN \cdot m/m$$

$$m_x = 70kgf \cdot m/m$$

$$m_y = \mu_y \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 1,65 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,00m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 0,34kN \cdot m/m$$

$$m_y = 34kgf \cdot m/m$$

Momentos máximos negativos:

$$x_x = -\mu'_x \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -7,28 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,00m^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -1,54kN \cdot m/m$$

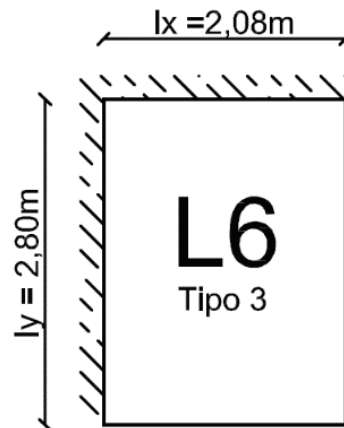
$$x_x = -154kgf \cdot m/m$$

$$x_y = -\mu'_y \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright x_y = -5,70 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,00m^2}{100} \quad \blacktriangleright x_y = -1,2kN \cdot m/m$$

$$x_y = -120kgf \cdot m/m.$$

Laje L6.

Figura 43 - Engastamentos da laje L6.



Fonte: Próprio autor.

Processo de Marcus:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \lambda = \frac{2,80}{2,08} = 1,36$$

Tabela 8, ($m_x = 23$; $m_y = 42,3$; $n_x = 10,4$; $n_y = 19,2$).

Momentos máximos positivos:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} \quad \blacktriangleright M_x = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,08 \text{m}^2}{23} \quad \blacktriangleright M_x = 0,99 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_x = 99 \text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} \quad \blacktriangleright M_y = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,08 \text{m}^2}{42,3} \quad \blacktriangleright M_y = 0,54 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_y = 54 \text{kgf} \cdot \text{m/m}.$$

Momentos máximos negativos:

$$M_{xe} = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_x} \quad \blacktriangleright M_{xe} = -\frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,08 \text{m}^2}{10,4} \quad \blacktriangleright M_{xe} = -2,20 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{xe} = -220 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{ye} = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_y} \quad \blacktriangleright M_{ye} = -\frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,08 \text{m}^2}{19,2} \quad \blacktriangleright M_{ye} = -1,19 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{ye} = -119 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

Processo de Czerny:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \lambda = \frac{2,80}{2,08} = 1,36$$

Tabela 13, ($\alpha_x = 23$; $\alpha_y = 36,6$; $\beta_x = 10,3$; $\beta_y = 12,7$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \frac{p \cdot l_x^2}{\alpha_x} \quad \blacktriangleright m_x = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,08 \text{m}^2}{23} \quad \blacktriangleright m_x = 0,99 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_x = 99 \text{kgf} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = \frac{p \cdot l_x^2}{\alpha_y} \quad \blacktriangleright m_y = \frac{5,3 \text{KN/m}^2 \cdot 2,08 \text{m}^2}{36,6} \quad \blacktriangleright m_y = 0,62 \text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_y = 62 \text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

Momentos máximos negativos:

$$m'_x = -\frac{p \cdot lx^2}{\beta_x} \quad \blacktriangleright m'_x = -\frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,08m^2}{10,3} \quad \blacktriangleright m'_x = -2,22kN \cdot m/m$$

$$m'_x = -222kgf \cdot m/m$$

$$m'_y = -\frac{p \cdot ly^2}{\beta_y} \quad \blacktriangleright m'_y = -\frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,08m^2}{12,7} \quad \blacktriangleright m'_y = -1,80kN \cdot m/m$$

$$m'_y = -180kgf \cdot m/m;$$

Processo de Bares:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \lambda = \frac{2,80}{2,08} = 1,36$$

Tabela 17, ($\mu_x = 4,24$; $\mu_y = 2,45$; $\mu'_x = 9,65$; $\mu'_y = 7,88$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \mu_x \frac{p \cdot lx^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 4,24 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,08m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 0,97kN \cdot m/m$$

$$m_x = 97kgf \cdot m/m$$

$$m_y = \mu_y \frac{p \cdot ly^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 2,45 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,08m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 0,56kN \cdot m/m$$

$$m_y = 56kgf \cdot m/m$$

Momentos máximos negativos:

$$x_x = -\mu'_x \frac{p \cdot lx^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -9,65 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,08m^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -2,21kN \cdot m/m$$

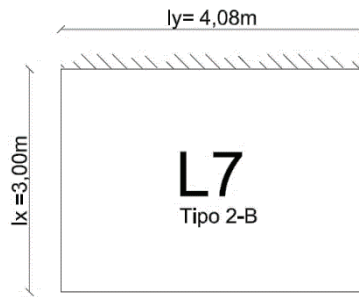
$$x_x = -221kgf \cdot m/m$$

$$x_y = -\mu'_y \frac{p \cdot ly^2}{100} \quad \blacktriangleright x_y = -7,88 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 2,08m^2}{100} \quad \blacktriangleright x_y = -1,8kN \cdot m/m$$

$$x_y = -180kgf \cdot m/m.$$

Laje L7.

Figura 44 - Engastamentos da laje L7.



Fonte: Próprio autor.

Processo de Marcus:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{4,08}{3,00} = 1,36$$

Tabela 7, ($m_x = 20,5$; $m_y = 49,5$; $n_x = 8,9$).

Momentos máximos positivos:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} \quad \blacktriangleright \quad M_x = \frac{5,3 \text{ kN/m}^2 \cdot 3,00 \text{ m}^2}{20,5} \quad \blacktriangleright \quad M_x = 2,32 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_x = 232 \text{ kgf} \cdot \text{m/m};$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} \quad \blacktriangleright \quad M_y = \frac{5,3 \text{ kN/m}^2 \cdot 3,00 \text{ m}^2}{49,5} \quad \blacktriangleright \quad M_y = 0,96 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_y = 96 \text{ kgf} \cdot \text{m/m}.$$

Momento máximo negativo:

$$M_{xe} = -\frac{p \cdot l_x^2}{n_x} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -\frac{5,3 \text{ kN/m}^2 \cdot 3,00 \text{ m}^2}{8,9} \quad \blacktriangleright \quad M_{xe} = -5,35 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{xe} = -535 \text{ kgf} \cdot \text{m/m}$$

Processo de Czerny:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{4,08}{3,00} = 1,36$$

Tabela 12, ($\alpha_x = 20,1$; $\alpha_y = 37,8$; $\beta_x = 9,4$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \frac{p \cdot lx^2}{\alpha_x} \quad \blacktriangleright m_x = \frac{5,3kN/m^2 \cdot 3,00m^2}{20,1} \quad \blacktriangleright m_x = 2,37kN \cdot m/m$$

$$m_x = 237kgf \cdot m/m$$

$$m_y = \frac{p \cdot ly^2}{\alpha_y} \quad \blacktriangleright m_y = \frac{5,3kN/m^2 \cdot 3,00m^2}{37,8} \quad \blacktriangleright m_y = 1,26N \cdot m/m$$

$$m_y = 126kgf \cdot m/m;$$

Momento máximo negativo:

$$m'_x = -\frac{p \cdot lx^2}{\beta_x} \quad \blacktriangleright m'_x = -\frac{5,3kN/m^2 \cdot 3,00m^2}{9,4} \quad \blacktriangleright m'_x = -5,07kN \cdot m/m$$

$$m'_x = -507kgf \cdot m/m.$$

Processo de Bares:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \lambda = \frac{4,08}{3,00} = 1,36$$

Tabela 16, ($\mu_x = 4,86$; $\mu_y = 2,34$; $\mu'_x = 10,54$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \mu_x \frac{p \cdot lx^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 4,86 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 3,00m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_x = 2,31kN \cdot m/m$$

$$m_x = 231kgf \cdot m/m$$

$$m_y = \mu_y \frac{p \cdot ly^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 2,34 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 3,00m^2}{100} \quad \blacktriangleright m_y = 1,11kN \cdot m/m$$

$$m_y = 111kgf \cdot m/m$$

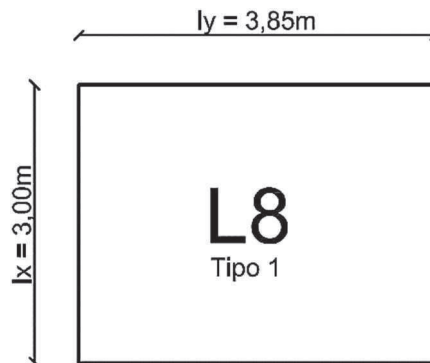
Momentos máximos negativos:

$$x_x = -\mu'_x \frac{p \cdot lx^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -10,54 \frac{5,3kN/m^2 \cdot 3,00m^2}{100} \quad \blacktriangleright x_x = -5,02kN \cdot m/m$$

$$x_x = -502kgf \cdot m/m.$$

Laje L8.

Figura 45 - Engastamentos da laje L8.



Fonte: Próprio autor.

Processo de Marcus:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{3,85}{3,00} = 1,28$$

Tabela 6, ($m_x = 17,5$; $m_y = 28,5$).

Momentos máximos positivos:

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{m_x} \quad \blacktriangleright \quad M_x = \frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 3,00\text{m}^2}{17,5} \quad \blacktriangleright \quad M_x = 2,12\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_x = 212\text{kgf} \cdot \text{m/m};$$

$$M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{m_y} \quad \blacktriangleright \quad M_y = \frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 3,00\text{m}^2}{28,5} \quad \blacktriangleright \quad M_y = 1,66\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$M_y = 166\text{kgf} \cdot \text{m/m}.$$

Processo de Czerny:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{3,85}{3,00} = 1,28$$

Tabela 12, ($\alpha_x = 15,9$; $\alpha_y = 22,4$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \frac{p \cdot l_x^2}{\alpha_x} \quad \blacktriangleright \quad m_x = \frac{5,3\text{KN/m}^2 \cdot 3,00\text{m}^2}{15,9} \quad \blacktriangleright \quad m_x = 3,00\text{kN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_x = 300\text{kgf} \cdot \text{m}/\text{m}$$

$$m_y = \frac{p \cdot l_x^2}{\alpha_y} \quad \blacktriangleright \quad m_y = \frac{5,3\text{KN}/\text{m}^2 \cdot 3,00\text{m}^2}{22,4} \quad \blacktriangleright \quad m_y = 2,12\text{N} \cdot \text{m}/\text{m}$$

$$m_y = 212\text{kgf} \cdot \text{m}/\text{m};$$

Processo de Bares:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \blacktriangleright \quad \lambda = \frac{3,85}{3,00} = 1,28$$

Tabela 16, ($\mu_x = 6,27$; $\mu_y = 4,45$).

Momentos máximos positivos:

$$m_x = \mu_x \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad m_x = 6,27 \frac{5,3\text{KN}/\text{m}^2 \cdot 3,00\text{m}^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad m_x = 2,99\text{kN} \cdot$$

m/m

$$m_x = 299\text{kgf} \cdot \text{m}/\text{m}$$

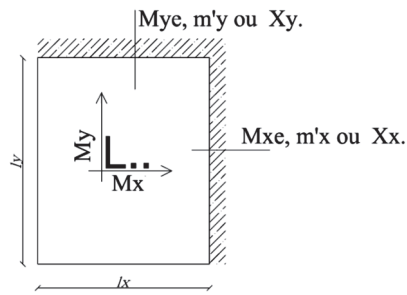
$$m_y = \mu_y \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad m_y = 4,45 \frac{5,3\text{KN}/\text{m}^2 \cdot 3,00\text{m}^2}{100} \quad \blacktriangleright \quad m_y = 2,12\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$$

$$m_y = 212\text{kgf} \cdot \text{m}/\text{m}$$

4.1.2 Compatibilização de momentos

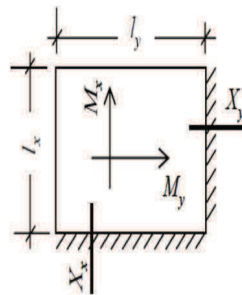
Para a compatibilização foi criado um croqui evidenciando os momentos calculados em todas as bordas das lajes. Para a representação gráfica dos momentos no desenho, foi utilizada uma notação de momentos fletores com as mesmas disposições das notações de Marcus, (figura 47) e Czerny (figura 33), porém neste caso adotando M_x para o eixo horizontal da laje e M_y para o eixo vertical.

Figura 46 - Notação adotada para o dimensionamento.



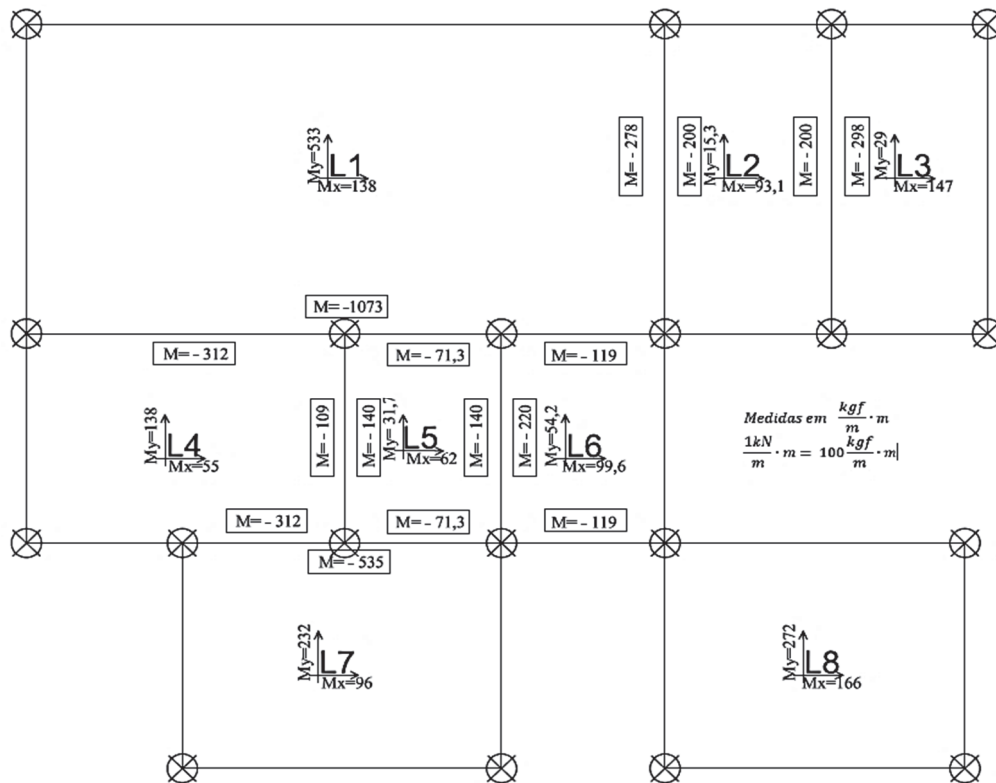
Fonte: Próprio autor.

Figura 47 - Notação de Marcus.



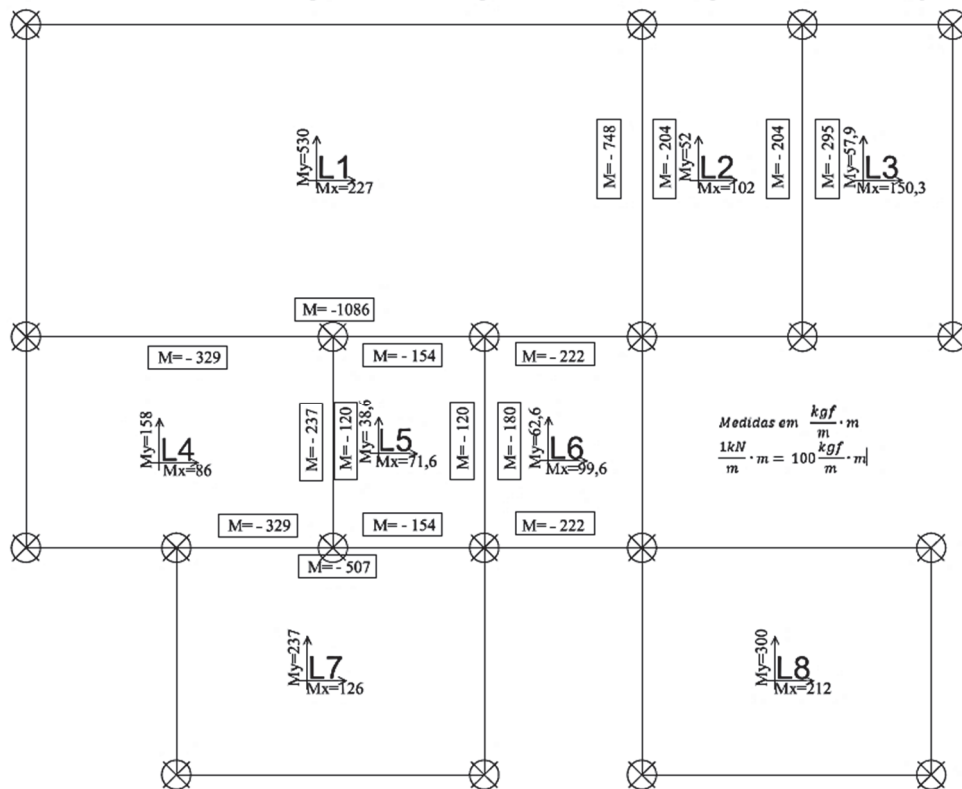
Fonte: Estruturas em concreto II, UFPa, 2006, p.15.

Figura 48 - Momentos dispostos para compatibilização (Marcus).



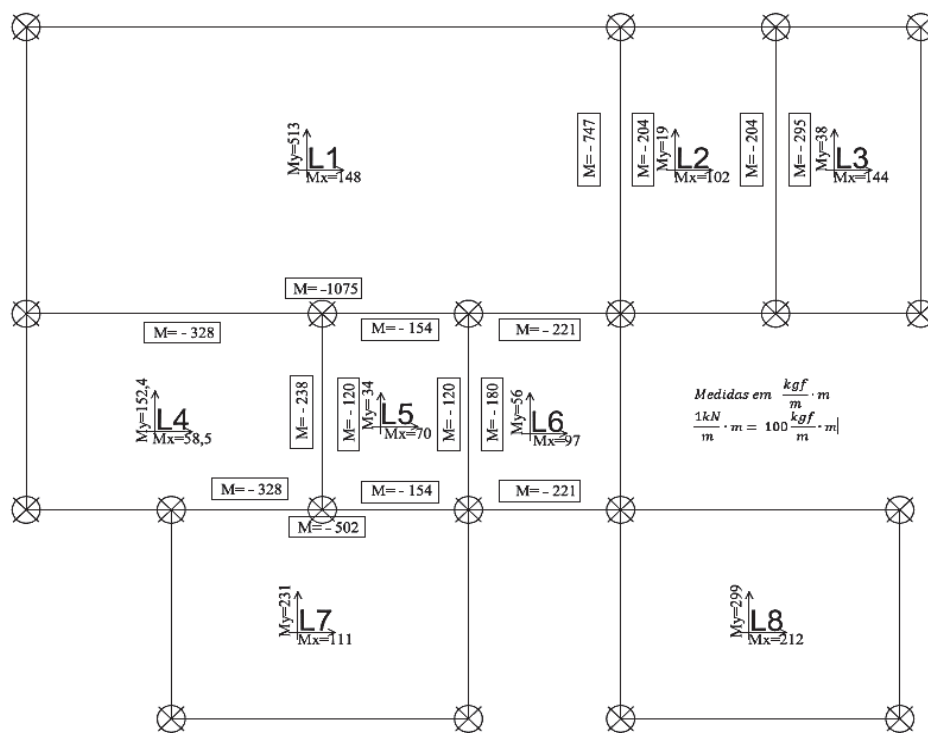
Fonte: Próprio autor.

Figura 49- Momentos dispostos para compatibilização (Czerny).



Fonte: Próprio autor.

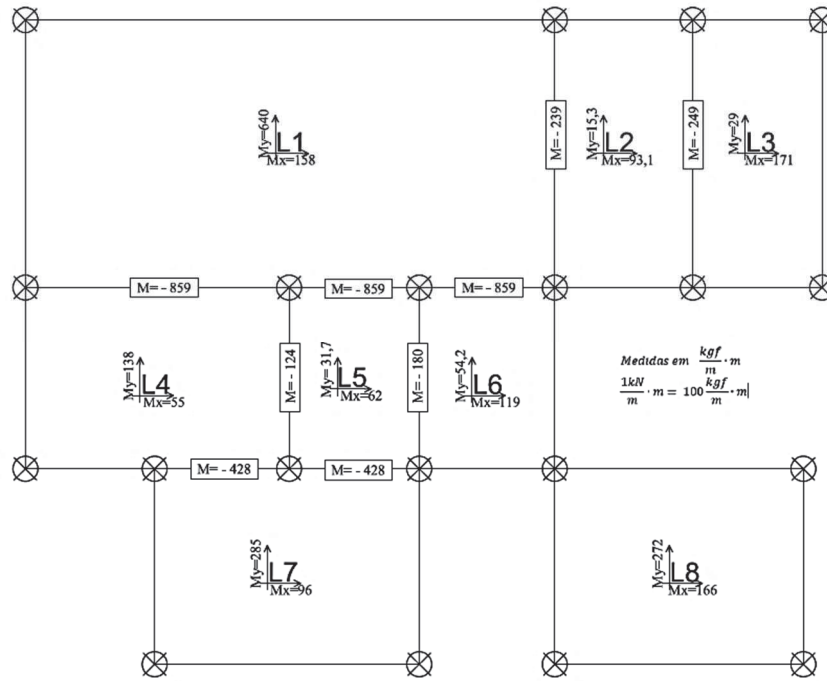
Figura 50- Momentos dispostos para compatibilização (Bares)



Fonte: Próprio autor.

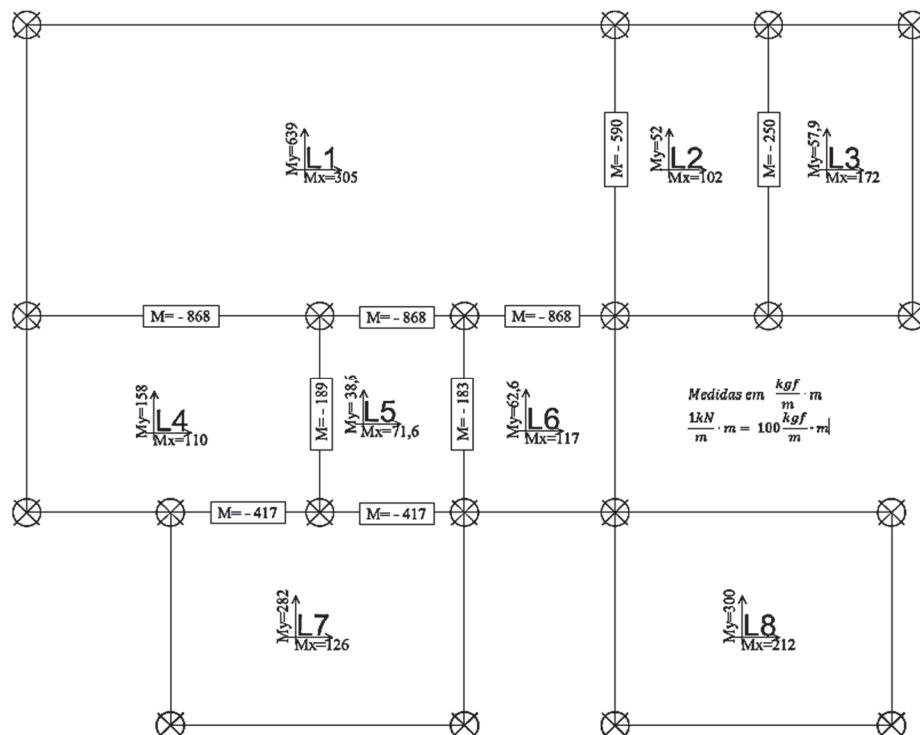
Com o cálculo dos esforços efetuados foi efetuada a compatibilização de momentos pelos métodos especificados em 1.3.1.4.

Figura 51 - Momentos compatibilizados, (Marcus).



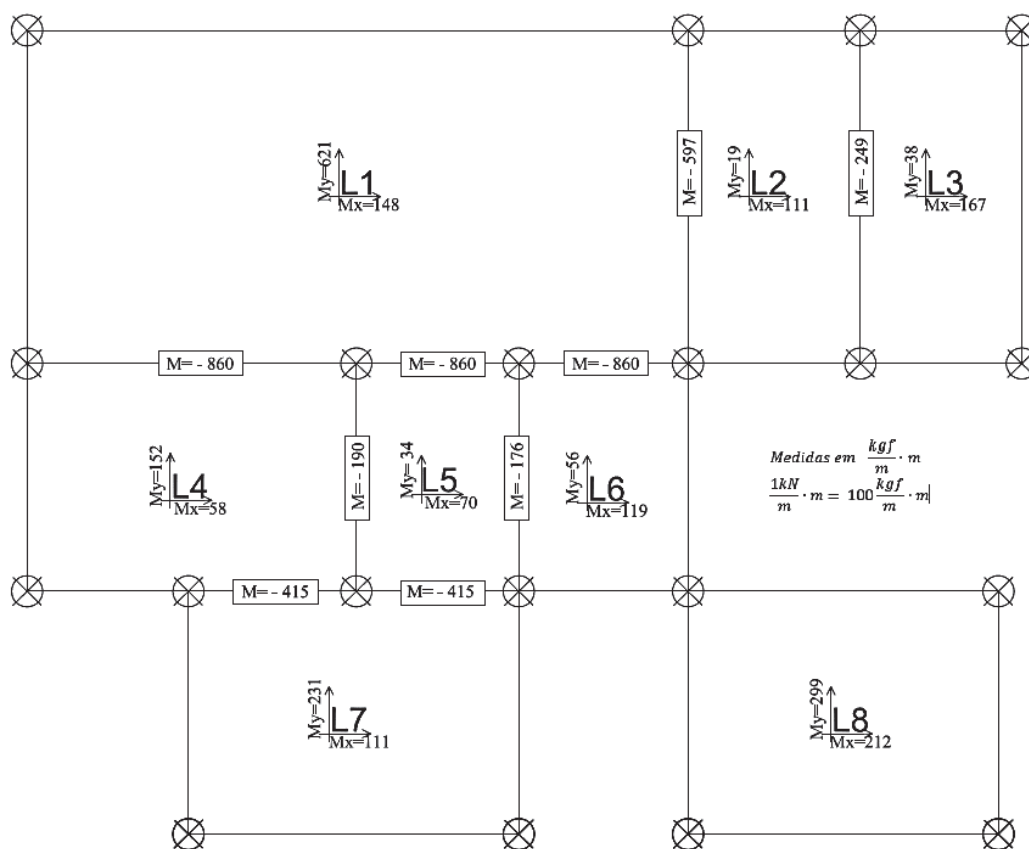
Fonte: Próprio autor.

Figura 52 - Momentos compatibilizados, (Czerny).



Fonte: Próprio autor.

Figura 53 - Momentos Compatibilizados, (Bares).



Fonte: Próprio autor.

4.1.3 Dimensionamento no Eberick

Para o dimensionamento da estrutura foi utilizado o software Eberick V8, versão devidamente registrada.

Uma vez que este estudo apresenta as considerações mediante o resultado de outros dimensionamentos já estudados deve-se configurar o programa do mesmo modo conforme outros estudos já realizados.

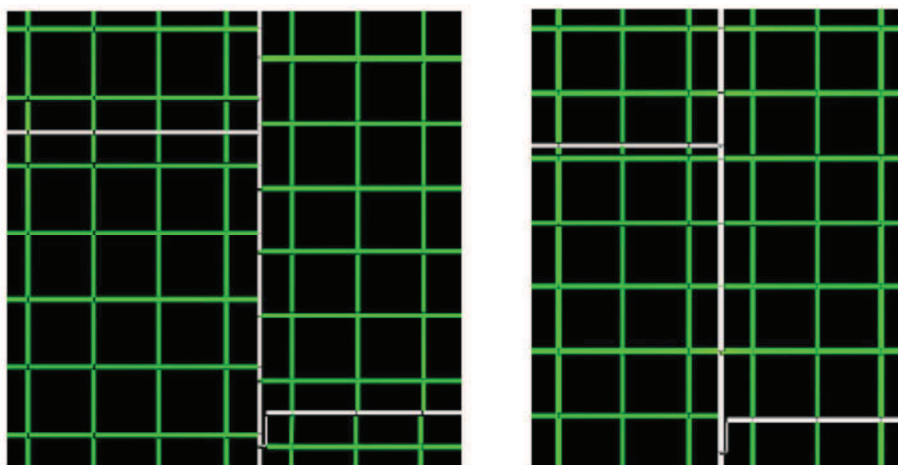
O software Eberick V8, permite uma vasta flexibilidade nas configurações do dimensionamento estrutural. Mediante a este termo os estudos comparativos¹⁵ aos quais este

¹⁵ **Análise de painel de lajes em concreto armado com procedimentos clássicos e computacionais** – Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/127306/TCC%20II%20%20Felipe%20Schmitt%20Richartz.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

trabalho apresenta as considerações finais de resultados, configura para o dimensionamento da seguinte forma:

- Na aba de configuração Materiais e Durabilidade foram garantidas que as classes de elementos estruturais compreendessem a Classe C25 para o concreto.
- Espaçamento da faixa entre grelhas iguala 25cm. Conforme a orientação apresentada em Silva (2005) para este espaçamento os resultados da grelha representam melhor o comportamento de pavimento, (Richards, 2005, p.41).
- Redução na torção de 20%.
- Vigas com redução de 99% para os esforços de torção, visto que desta forma estas vigas não absorverão os esforços fletores de apoio providos da laje, esta consideração é também usual para o cálculo simplificado por meio de tabelas.
- Utilização da Referência Global na Grelha. Ferramenta do Eberick utilizada para discretizar a grelha de forma contínua em toda planta de dimensionamento e não por pavimento.

Figura 54 – Disposição sem referência global na grelha (esquerda), e com referência global na grelha (direita).



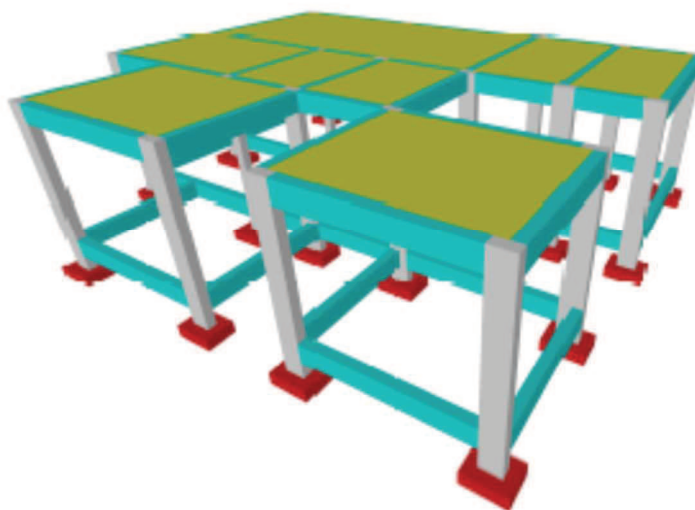
Fonte: Richards, 2014, p.43

- Como o dimensionamento do software considera para o cálculo o coeficiente de ponderação γ_f , conforme admitido na NBR 6118, para que a análise comparativa aos cálculos por tabelas os valores deste coeficiente foi considerado com valor de 1,0.

- Todas as lajes devem ser consideradas engastadas nas adjacências para que se gere os momentos negativos.
- Deve ser considerada também que não há ação do vento na estrutura.
- Espessura das lajes de 10cm.

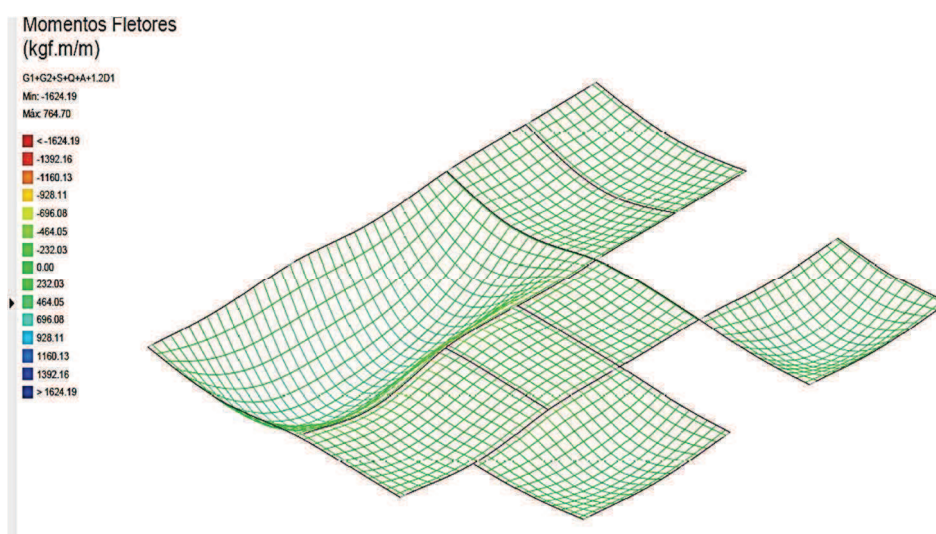
Após a configuração e lançamento da estrutura é possível visualizar o pórtico 3D e o modelo de grelha gerado no dimensionamento.

Figura 55 - Pórtico 3D gerado.



Fonte: Próprio autor/Eberick V8.

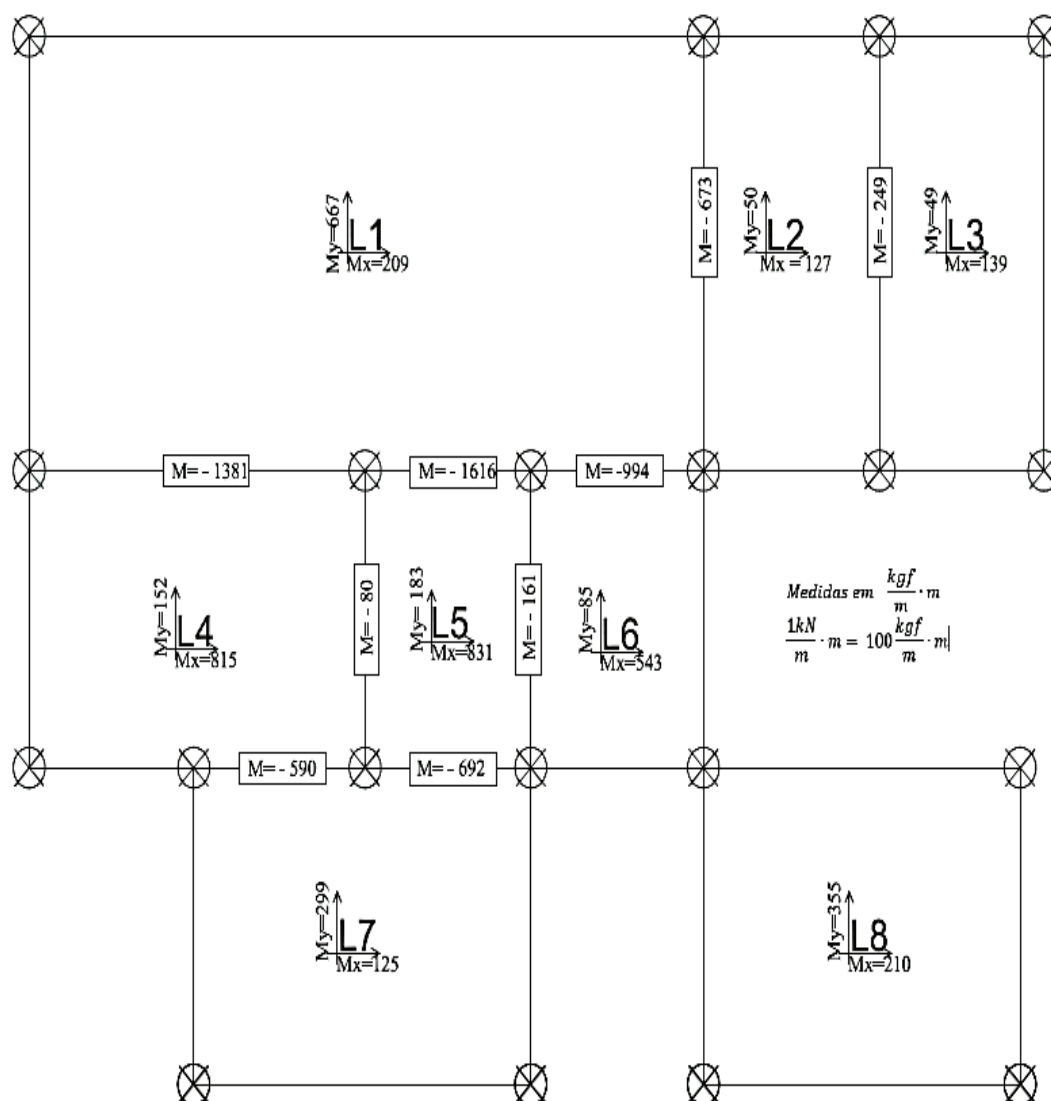
Figura 56 - Grelha do pavimento.



Fonte: Próprio autor/Eberick V8.

Como resultado final o Eberick apresentou os seguintes momentos gerados:

Figura 57 - Representação dos momentos Eberick.



Fonte: Próprio autor.

5 OUTROS ESTUDOS

Um dos objetivos deste trabalho visa a análise comparada a outros estudos de mesma ordem já realizados anteriormente. Estes estão acessíveis conforme descrito na nota de rodapé de número 15 deste documento. Para que se efetue as considerações dos resultados cabe neste capítulo expor sucintamente os objetos estudados.

5.1 ESTUDO 1

O estudo intitulado, Comparação de métodos de cálculo para determinação dos momentos fletores em lajes de concreto armado; analisa os momentos fletores nas lajes considerando os mesmos métodos de cálculo descritos neste trabalho, é de autoria de Alessandro Zezen, (2012) para a Instituição de Ensino de Injuí/RS. A análise foi feita mediante a seguinte estrutura:

Figura 58 - Estrutura de outro estudo.



Fonte: Alessandro Zezen, 2012, p.62.

Os resultados finais apresentados estão representados nas tabelas:

Tabela 19 - Momentos fletores positivos Estudo 1.

	Tabelas de Marcus		Tabelas de Czerny		Tabelas de Bares		Analogia de Grelha Eberick V5 Valores em $kN \cdot m/m$	
	Valores em $kN \cdot m/m$		Valores em $kN \cdot m/m$		Valores em $kN \cdot m/m$		M_x	M_y
	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y
Laje L1	2,26	2,89	2,58	2,99	2,48	2,94	2,51	2,52
Laje L2	0,99	1,14	1,09	1,20	1,04	1,18	1,00	1,25
Laje L3	2,14	0,81	2,13	1,02	2,15	1,07	2,35	1,73
Laje L4	2,96	2,65	3,31	3,10	3,37	3,12	2,84	3,17
Laje L5	1,84	1,11	1,87	1,76	1,85	1,14	1,87	1,37
Laje L6	2,25	2,42	2,67	2,48	2,56	2,45	2,58	2,54

Fonte: Alessandro Zezen 2012, p.85.

As diferenças percentuais apresentadas nas tabelas 20, 22, 24, 26 e 27, são os resultados dimensionados nos Estudos e apresentam as diferenças numéricas de resultados obtidos. Na representação das tabelas, os valores negativos significam que houve redução numérica do momento gerado, assim no valor positivo houve acréscimo.

Tabela 20 - Diferenças entre momentos fletores positivos Estudo 1.

	Tabelas de Marcus		Tabelas de Czerny		Tabelas de Bares	
	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y
Laje L1	-10,0%	14,7%	2,8%	18,7%	-1,2%	16,7%
Laje L2	-1,0%	-8,8%	9,0%	-4,0%	4,0%	-5,6%
Laje L3	-8,9%	-53,2%	-9,4%	-41,0%	-8,5%	-38,2%
Laje L4	4,2%	-16,4%	16,5%	-2,2%	18,7%	-1,6%
Laje L5	-1,6%	-19,0%	0,0%	28,5%	-1,1%	-16,8%
Laje L6	-12,8%	-4,7%	3,5%	-2,4%	-0,8%	-3,5%

Fonte: Alessandro Zezen 2012, p.85.

Tabela 21 - : Momentos fletores negativos Estudo 1.

	Tabelas de Marcus Valores em $kN \cdot m/m$	Tabelas de Czerny Valores em $kN \cdot m/m$	Tabelas de Bares Valores em $kN \cdot m/m$	Analogia de Grelha Valores em $kN \cdot m/m$
L1 - L2	-3,38	-4,16	-4,16	-3,25
L1 - L3	-4,33	-4,59	-4,58	-4,27
L1 - L4	-5,36	-6,07	-6,04	-3,09
L2 - L4	-4,24	-5,13	-5,13	-5,94
L3 - L4	-5,00	-5,54	-5,69	-2,22
L3 - L5	-2,12	-3,42	-3,44	-2,06
L4 - L6	-5,41	-6,18	-6,16	-2,93
L5 - L6	-4,45	-4,92	-4,88	-2,41

Fonte: Alessandro Zezen 2012, p.86.

Tabela 22 - Diferenças entre momentos fletores negativos Estudo 2.

	Tabelas de Marcus	Tabelas de Czerny	Tabelas de Bares
L1 - L2	4,0%	28,0%	28,0%
L1 - L3	33,2%	41,2%	40,9%
L1 - L4	64,9%	86,8%	85,8%
L2 - L4	30,5%	57,8%	57,8%
L3 - L4	53,8%	70,5%	75,1%
L3 - L5	-34,8%	5,2%	5,8%
L4 - L6	66,5%	90,2%	89,5%
L5 - L6	36,9%	51,4%	50,2%

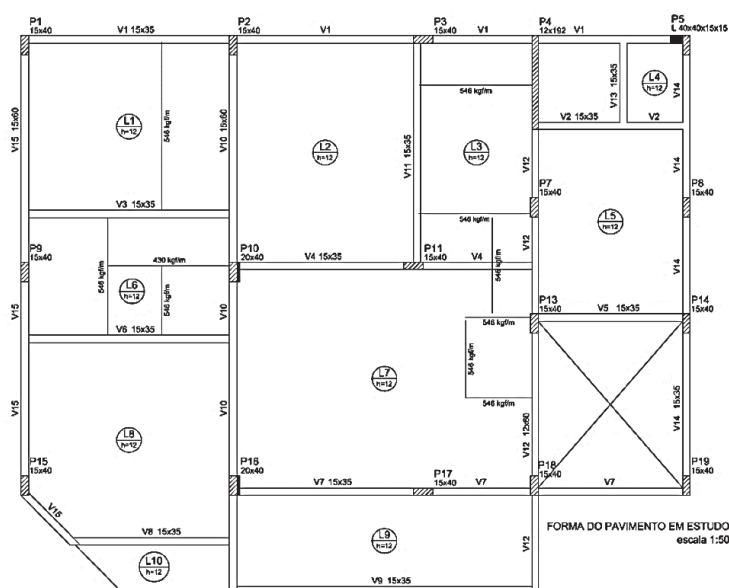
Fonte: Alessandro Zezen 2012, p.86.

5.2 ESTUDO 2

O segundo estudo referencial intitulado, Projeto de painel de laje em concreto armado com procedimentos clássicos e computacionais, é de autoria de Felipe Schmitt Richartz, para a Universidade Federal de Santa Catarina do ano de 2014. O mesmo apresenta vários métodos de configurações de cálculo, no entanto conforme descrito em 3.1.3 apenas a parte do estudo em que apresenta o dimensionamento similar a este estudo deve ser considerado para análise de resultados finais. O cálculo por tabelas deste estudo compara os métodos utilizando as tabelas de Bares para o dimensionamento.

A estrutura analisada por este estudo é a mesma do tutorial descrito no Eberick V5.

Figura 59 - Laje considerada no Estudo 2.



Fonte: Richartz, 2014, p.28.

Os resultados finais estão definidos em $kN \cdot m/m$. As figuras 60 e 61 apresentam para cada laje os resultados dimensionados nas duas direções, (x e y):

Figura 60 - Momentos positivos Estudo 2.

Momentos fletores positivos máximos				
	TABELAS		EBERICK	
Laje	Mdx	Mdy	Mdx	Mdy
1	6,07	3,9	6,05	4,86
2	4,07	2,28	12,72	2,41
3	4	1,35	12,78	3,19
4	0,79	0,7	0,54	0,78
5	5,16	2,03	4,63	2,79
6	3,19	1,07	5,5	2,26
7	10,09	4,91	8,81	6,35
8	4,08	3,13	11,63	32,67
9	2,4	-	6,84	4,19
10	-	-	13,79	4,76

Fonte: Richartz, 2014, p.45.

Figura 61 - Momentos negativos Estudo 2.

Momentos fletores negativos, compatibilizados		
	TABELAS	EBERICK
Continuidade		
L1 - L2	9,52	11,53
L2 - L3	8,66	7,4
L3 - L5	6,93	10,14
L4 - L5	1,14	11,76
L6 - L2	7,22	5,71
L6 - L7	9,85	11,22
L7 - L5	6,93	3,25
L8 - L7	10,28	12,92
L8 - L9	6,6	16,04
L10 - L9	-	21,01
L1 - L6	9,12	5,7
L2 - L7	13,18	22,57
L3 - L7	13,18	20,62
L6 - L8	8,08	10,72
L7 - L9	13,18	15,46
L8 - L10	4,19	6,47

Fonte: Richartz, 2014, p.45.

6 ANÁLISE COMPARATIVA E CONCLUSÕES

A primeira análise deste trabalho visou o objeto de estudo conforme 2.1, em decorrência dos métodos de cálculo simplificado e numérico. A apresentação de tabelas comparativas seguirá o exemplo do Estudo 1, para que posteriormente possam ser equiparados.

6.1 ESTE ESTUDO

Com os resultados obtidos (Figuras 51, 52, 53 e 57), formulou-se uma tabela descritiva dos momentos positivos gerados positivos:

Tabela 23 - Momentos positivos pelos 4 métodos.

	Método de Marcus Valores em $Kgf \cdot m/m$		Método de Czerny Valores em $Kgf \cdot m/m$		Método de Bares Valores em $Kgf \cdot m/m$		Método da Analogia de Grelha Eberick Valores em $Kgf \cdot m/m$	
	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y
Laje L1	158	640	227	530	223	621	209	667
Laje L2	93	15	102	52	111	19	127	50
Laje L3	171	38	150	57	167	37	139	49
Laje L4	82	138	110	158	152	82	831	143
Laje L5	62	31	71	34	70	28	543	85
Laje L6	62	61	66	67	119	56	125	299
Laje L7	96	232	237	126	231	111	210	355
Laje L8	272	166	300	212	299	212	815	152

Fonte: Próprio autor.

Para a comparação dos métodos com o processo por analogia de grelha foi gerada uma tabela apresentando as diferenças percentuais descritivas de cada laje comparada com o cálculo efetuado pelo software. A análise pode chegar a 90, 13% de redução como também apresenta valores maiores que o dimensionamento do Eberick em 39,47%.

Tabela 24 - Percentual de momentos fletores positivos comparados .

Valores Percentuais	Marcus		Czerny		Bares	
	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y
Laje L1	-24,40%	- 4,05%	8,61%	- 0,54%	6,70%	- 6,90%
Laje L2	-26,77%	-70,00%	- 9,69%	4,00%	-12,60%	-62,00%
Laje L3	23,02%	- 22,45%	7,91%	16,33%	20,14%	-24,49%
Laje L4	-90,13%	- 3,50%	-86,76%	10,49%	-81,71%	-42,66%
Laje L5	-88,58%	-63,53%	-86,92%	-60,00%	-87,11%	-67,06%
Laje L6	-50,40%	-79,60%	-47,20%	- 7,59%	- 4,80%	-81,27%
Laje L7	-54,29%	-34,65%	12,86%	- 4,51%	10,00%	-68,73%
Laje L8	-66,63%	9,21%	-63,19%	39,47%	-63,31%	39,47%

Fonte: Próprio autor.

Seguindo o mesmo processo demonstrativo os momentos negativos ficam da seguinte forma.

Tabela 25 - Resultados dos momentos fletores negativos.

	Método de Marcus <i>Kgf · m/m</i>	Método de Czerny <i>Kgf · m/m</i>	Método de Bares <i>Kgf · m/m</i>	Método Analogia de Grelha Eberick <i>Kgf · m/m</i>
(-)				
Eng. L1-L4	859	868	860	1381
Eng. L1-L5	859	868	860	1616
Eng. L1-L6	859	868	860	994
Eng. L1-L2	239	590	597	673
Eng. L2-L3	249	250	249	249
Eng. L6-L5	141	157	140	161
Eng. L7-L5	428	417	419	692
Eng. L7-L4	428	417	419	590
Eng. L4-L5	124	157	190	180

Fonte: Próprio autor.

Tabela 26 - Diferenças percentuais dos momentos negativos.

Valores Percentuais	Método de Marcus	Método de Czerny	Método de Bares
Eng. L1-L4	- 37,80 %	- 37,15 %	- 37,72 %
Eng. L1-L5	- 46,84 %	- 46,29 %	- 46,78 %
Eng. L1-L6	- 13,58%	- 12,68 %	- 13,48 %
Eng. L1-L2	- 64,49 %	- 12,33 %	- 11,29 %
Eng. L2-L3	0,00 %	0,40 %	0,00 %
Eng. L6-L5	- 12,42 %	- 2,48 %	- 13,04 %
Eng. L7-L5	- 38,15 %	- 39,74 %	- 39,45 %
Eng. L7-L4	- 27,46 %	- 29,32 %	- 28,98 %
Eng. L4-L5	- 31,11 %	- 12,78 %	5,55%

Fonte: Próprio autor.

Analisando a tabela 26, fica evidenciado que os momentos negativos possuem discrepância menores, se relacionados à discrepância dos momentos positivos.

6.1.1 Primeiras Conclusões

Pode-se observar pela tabela 23 que os valores obtidos no dimensionamento simplificado são capazes de se estabelecerem em um padrão por ordem de grandeza, tal fato dá credibilidade de semelhança de resultados obtidos por estes métodos de cálculo. Em sua grande maioria o processo de cálculo de Marcus apresentou valores menores para o dimensionamento que os outros dois métodos, estes por sua vez apresentam uma proximidade nos valores dimensionados.

Vale ressaltar a variação dos momentos de engastamento as quais são menores a variação entre si. Ainda se observa que os engastamentos das lajes L1, mesmo com a variação dos momentos fletores nos engastes gerado pelo software a discrepância comparada aos métodos simplificados portou-se de modo uniforme na geração de momentos. Como há entre os resultados uma variabilidade significativa, foram inseridas as tabelas de resultados em Excel e calculadas as médias para se comparar a outros estudos do gênero, neste caso o Estudo 1 e 2 citados anteriormente.

6.2 COMPARATIVO A OUTROS ESTUDOS

As definições de dimensionamento para que se efetue o cálculo no Eberick devem ter compatibilidade entre os estudos, neste caso, é o que possibilitou as conclusões a seguir.

Como tratam-se de estruturas diferentes a comparação deve ser efetuada mediante a média dos momentos encontrados. Logo o Estudo 1, para momentos positivos apresenta médias percentuais de 9,79% a menos para os resultados dos momentos fletores, gerados pelo processo de Marcus, 1,6% a mais para os momentos gerados em Czerny e redução de 3,16% para Bares. Para os momentos negativos a variação obteve somente resultados aumentados se comparado ao Eberick, sendo 31,88%, 53,89% e 54,14% para Marcus, Czerny e Bares, respectivamente.

Da mesma forma foram comparados os dados obtidos para a o objeto de estudo desta pesquisa, resultando em redução de 40,42%; 26,67% e 32,89%, para os métodos de Marcus, Czerny e Bares respectivamente nos momentos positivos. Nos momentos negativos os dados

foram de 30,2%, 21,37% e 20,6%, para Marcus, Czerny e Bares, ambos valores de redução comparados ao software.

Tabela 27 - Tabela resumo.

Valores em %.		Estudo 1	Estudo 2	Objeto desta pesquisa	
Marcus	M+	-9,79%	Caso não estudado	-40,42%	
	M-	+31,88%		-30,2%	
Czerny	M+	+1,67%		-26,67%	
	M-	+53,89%		-21,37%	
Bares	M+	-3,16%		-42,13%	-32,89%
	M-	+54,14%		-50,67%	-20,6%

Fonte: Próprio autor.

Nesta segunda comparação observou-se que os resultados indicados no Estudo 1, comporta-se de maneira inversa aos demais, (nos três métodos para o objeto de pesquisa e no método de Bares para o Estudo 2). Na geração de momentos fletores os valores obtidos no Estudo 1, superam de modo amplo os obtidos pelo dimensionamento por software do mesmo estudo enquanto os outros dois estudos reduzem. Somente no critério de Bares é que os três estudos possuem dimensionamento realizados. Ainda assim os dados do Estudo 1 divergem entre si de maneira comportamental diferente dos outros estudos, ou seja, possui uma variação muito elevada entre os resultados próprios.

Para finalizar com os dados obtidos generalizou-se os métodos de cálculo em dois grupos, sendo métodos básicos e software, (neste caso o Eberick). Os resultados obtidos para a variação média convergem para 17,88%, de redução dos métodos simplificados mediante o software, considerando todos os resultados de dimensionamentos como uma população estatística.

6.2.1 Conclusões finais

Este estudo visou a comparação de momentos fletores em lajes maciças para os métodos de cálculo de Marcus, Czerny e Bares mediante uma estrutura idealizada para atender as

tipologias conforme os tipos de apoio das lajes. Também visou as considerações de outros estudos do mesmo gênero.

Na comparação do objeto de estudo desta pesquisa (Cap. 2.1), observou-se que os métodos de Marcus possuem o menor valor para dimensionamento comparativo ao software Eberick V8, mesmo comportamento conforme observado no Estudo 1 quando comparados.

Em ambos os casos o dimensionamento de Czerny e Bares, possuem aproximação nos resultados comparados aos do software, no entanto não é possível definir um padrão comportamental exato na geração de resultados, faz-se necessário outras verificações para validação dos resultados obtidos. Isto só será possível quando o espaço amostral conter um número mais abrangente de estudos comparados e analisados. Para a continuidade deste trabalho, propõe-se a análise de momentos de outras tipologias de lajes conforme os métodos estudados, também através de outros tipos de métodos de cálculo simplificados e a comparação entre métodos de cálculos numéricos, visto que há outros softwares que trabalham com o dimensionamento pelo método dos elementos finitos.

Conclui-se observando o Estudo 1 que para momentos positivos a divergência dos momentos gerados em relação ao Eberick é muito menor que os demais estudos, dando credibilidade ao dimensionamento tabelado, no entanto este comportamento não fez-se da mesma maneira analisando os demais estudos, no entanto, tomando como pressuposto que as estruturas analisadas no Estudo 2 e no Objeto de pesquisa possuem uma variação maior dos tipos de lajes, (uma vez que no Estudo 1 foram avaliados apenas duas tipologias), cabe a verificação mais exata a partir de outros dimensionamentos baseados nesta hipótese.

Enfim as diferenças encontradas para cada estudo possuem uma variabilidade que pode ser causa do comportamento da grelha no pavimento, uma vez que esta analisa a estrutura como um todo, definindo valores mais exatos ao comportamento estrutural, visto que os métodos simplificados dimensionam como pavimentos isolados.

Na verificação final, pode-se generalizar os dados obtidos concluindo que um método simplificado isolado possui uma variabilidade nas taxas de momentos fletores de até 55% para mais ou para menos analisando um método isolado mediante o processo de cálculo pelo software. No mesmo critério para adoção de um parâmetro informativo pode-se concluir que o dimensionamento tabelado e por softwares possuíram uma variabilidade de 17,88% nas taxas quando generalizados os dados do dimensionamento por tabelas. Para tal pode-se afirmar que

o dimensionamento simplificado pode ser utilizado para análise preliminar de resultados, para o caso de indisposição de elementos mais específico de dimensionamento, como o software.

No campo das conclusões pessoais a realização deste trabalho proporcionou um amplo entendimento dos processos de cálculo simplificados e suas propriedades diferenciadas dos métodos computacionais, a importância deste entendimento parte da premissa que, uma vez que o software analisado possui um campo amplo para as configurações de dimensionamento estrutural, para a concepção de um projeto de estruturas, deve-se analisar o comportamento da mesma nos resultados obtidos por software, de forma que harmonize a arquitetura e os princípios econômicos na construção civil.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, José Milton. **A resistência a tração e energia de fratura do concreto**, 2001, Editora Dunas, Rio Grande/RS, 2001.

_____. **Curso de concreto armado**, Editora Dunas, Rio Grande/RS, 2010. Vol 1. 4ed.

_____. **Curso de concreto armado**, Editora Dunas, Rio Grande/RS, 2010. Vol 2. 3ed.

_____. **Curso de concreto armado**, Editora Dunas, Rio Grande/RS, 2014, Vol. 3. 4.ed.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS DE NORMAS TÉCNICAS, **Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento**, NBR 6118, ABNT, Rio de Janeiro, 256p, 2014.

_____. **Cargas para cálculo de estruturas de edificações**, NBR 6120, ABNT, Rio de Janeiro, 6p, 1980.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Estruturas em Concreto I**. Apostila de disciplina. Universidade Estadual Paulista. Bauru/SP, 2006.

BOTELHO, Manoel Henrique Campos; MARCHETTI, Osvaldemar. **Concreto Armado eu te amo**. 2000, 422p. Editora Edgard Blucher LTDA.

BUENO, Luiz Otávio da. **Cálculo e dimensionamento de lajes e comparação entre as ferramentas disponíveis**. Monografia no curso de Engenharia Civil. Universidade Anhembí Morumbi, São Paulo 2008.

CAMACHO, Jeferson Sidiney. **Estudo das lajes**. 2004. 59 p. Apostila de disciplina. Universidade Estadual Paulista - UNESP. Bauru/SP, 2004.

_____. **Concreto armado: Estados Limites de Utilização**. 2005. 48 p. Apostila de disciplina. Universidade Estadual Paulista - UNESP. Bauru/SP, 2004.

CARNEIRO, Ronaldson. **Estruturas em Concreto II**. Apostila de disciplina. Universidade Federal do Pará/ UFPa. Pará/Pa, 2006.

CARVALHO, Roberto Chust. **Análise não – linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha**. 1994. 203 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994.

_____. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. 1.ed. São Carlos, Editora da UFSCar. São Paulo, São Carlos, 1994.

CASTRO, Luís Manoel Santos. **Análise de lajes com o Método das diferenças finitas**. 2001. Disponível em: <<http://www.civil.ist.utl.pt/~luis/textos/lajesdf.pdf>> Acesso em 03 de março de 2016, 13:00hs.

DUMÊT, Tatiana Bittencourt. **Estruturas em concreto armado I**. Apostila de disciplina. Universidade Federal da Bahia. Salvador/BA, 2008.

FONTES, Fernando Fernandes; PINHEIRO, Libânio Miranda. **Tipos de análise estrutural para elementos lineares segundo a NBR6118:2003**. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, v. 11, n. 49, p. 117-141, 2009.

FUSCO, Pérciles B. **Estruturas de Concreto – Solicitações Normais**. Rio de Janeiro:Guanabara Dois, 1981. 464 p.

F.A. Campanari, *Teoria das Estruturas*, Vols. 1, 2, 3 e 4, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1985.

JULIANO, André Vergutz; CUSTÓDIO, Ricardo. **Análise comparativa de resultados obtidos em softwares de Dimensionamento de estruturas em concreto**. Monografia no curso de Engenharia Civil, Curitiba 2010.

JÚNIOR, Byl; LIMA, Eder; OLIVEIRA, Janes. **Estudo comparativo de cálculo de lajes, Analogia de Grelha x Tabela de Czerny**. Artigo. Universidade Católica de Goiás. Disponível em: <http://www2.ucg.br/nupenge/pdf/Byl_Farney_Junior.pdf > Acesso em 03 de março de 2014, 16:00hs.

JÚNIOR, Isaltino Avelino de Oliveira. **Cálculo de lajes em concreto armado pela teoria das linhas de ruptura desenvolvimento de ferramenta computacional**. Monografia apresentada ao curso de Engenharia Civil. UFRS, Porto Alegre, 2015.

KIRST, Renan Weber. **Elementos superficiais laminares em concreto armado: Estudo comparativo entre métodos de cálculo**. Monografia apresentada ao curso de Engenharia Civil. Universidade do Rio Grande do Sul. Porto Alegre 2010.

MARTHA, Luiz Fernando. **Métodos Básicos da Análise de Estruturas**. 1. Ed. Rio de Janeiro: 1999.

MORAIS, José Carlos Pereira. **Estudo comparativo das configurações e resultados entre programas Cypecad e Eberick para dimensionamento de estrutura em concreto armado**. Monografia do curso de pós-graduação *latu sensu* em engenharia estrutural. Centro Universitário Aufusto Motta, Rio de Janeiro 2014.

MORAIS, Victor Louzada de. **Comparação entre o método aproximado e o método dos elementos finitos para a análise de uma estrutura de edifício**. Monografia UFRJ 2008.

MUZARDO, Cassiane D.; PINHEIRO, Libânio Miranda; SANTOS, Sandro P. **Lajes Maciças**. Apostila de disciplina. USSP-EESC – Departamento de Engenharia de Estruturas. São Carlos/RS, 2010.

PINHEIRO, Libânio M. (1997). **Estados limites de utilização**. São Carlos, EESC-USP

RICHARTSZ, Felipe Schimitt. **Projeto de painel de laje em concreto armado com procedimentos clássicos e computacionais**. Monografia apresentada ao curso de Engenharia Civil. UFSCa, Santa Catarina 2014.

ZENZEN, Alessandro. **Comparação de métodos de cálculo para determinação dos momentos fletores em lajes de concreto armado.** Monografia apresentada ao curso de Engenharia Civil. Universidade de Injuí, Injuí/RS 2014.